

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mateja Vlahović

**ARMA PROCESI U MEDICINSKOJ**  
**OPTIMIZACIJI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Veliko hvala svima koji su bili uz mene kad je trebalo.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Stacionarni vremenski nizovi</b>	<b>2</b>
1.1 Vremenski niz . . . . .	2
1.2 Stohastički procesi . . . . .	2
1.3 Stacionarnost i striktna stacionarnost . . . . .	4
1.4 Procjena i eliminacija trenda i sezonalnosti . . . . .	6
1.5 Autokovarijacijska funkcija stacionarnog procesa . . . . .	10
1.6 Višedimenzionalna normalna distribucija . . . . .	12
<b>2 Hilbertovi prostori</b>	<b>13</b>
2.1 Unitarni prostor i njegova svojstva . . . . .	13
2.2 Hilbertovi prostori . . . . .	15
2.3 Teorem o projekciji . . . . .	15
2.4 Ortonormalni skupovi . . . . .	17
2.5 Projekcija u $\mathbb{R}^n$ . . . . .	19
2.6 Konvergencija i najbolji linearni prediktor u $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . . . . .	20
<b>3 Stacionarni ARMA procesi</b>	<b>24</b>
3.1 Kauzalni i invertibilni ARMA procesi . . . . .	24
3.2 Računanje autokovarijacijske funkcije ARMA( $p, q$ ) procesa . . . . .	30
3.3 Parcijalna autokorelacijska funkcija . . . . .	31
3.4 Autokovarijacijska funkcija izvodnica . . . . .	33
<b>4 Predikcija stacionarnih procesa</b>	<b>35</b>
4.1 Jednadžbe prediktora u vremenskoj domeni . . . . .	35
4.2 Rekurzivna metoda za računanje najboljih linearnih prediktora . . . . .	37
4.3 Rekurzivni prediktor ARMA( $p, q$ ) procesa . . . . .	40

4.4	Predikcija stacionarnih Gaussovskih procesa; predikcijske granice . . . .	43
4.5	Predikcija kauzalnog invertibilnog $ARMA(p, q)$ procesa . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Primjena ARMA modela u medicini</b>	<b>47</b>
5.1	Opisna statistika . . . . .	47
5.2	Obrada podataka . . . . .	52
<b>A</b>	<b>Kodovi u R-u</b>	<b>58</b>
	<b>Bibliografija</b>	<b>66</b>

# Uvod

Vremenski niz je skup opažanja  $x_t$  prikupljenih do nekog trenutka  $t$ . O njemu možemo razmišljati i kao modelu, tj. slučajnom procesu indeksiranom u nekom vremenu. Prilikom analize vremenskih nizova javlja se pojam stacionarnog procesa i upravo će on imati ključnu ulogu u toj analizi. Teorija stacionarnih procesa koristi se za analizu, fitanje i predikciju nizova. U prvom dijelu rada dajemo upravo tu teorijsku podlogu.

U prvom poglavlju dajemo gornju definiciju vremenskog niza i upoznajemo se sa pojmovima njegove stacionarnosti te stohastičkog procesa. Vidjet ćemo dekompoziciju vremenskog niza na komponentu trenda i sezonalnosti te ostatka koji će biti stacionaran vremenski niz. Upoznat ćemo se s autokovarijacijskom funkcijom stacionarnog procesa i njezinim svojstvima. U drugom poglavlju osvrnut ćemo se na unitarne prostore i njihova svojstva, Hilbertove prostore kao poseban slučaj unitarnih prostora te iskazati teorem o projekciji. Treće poglavlje definira nam ARMA proces i njegova svojstva, autokorelacijsku funkciju i parcijalnu autokovarijacijsku funkciju, i uvodimo pojmove kauzalnosti i invertibilnosti procesa. Četvrto poglavlje sadrži prediktorske jednadžbe, kauzalne invertibilne ARMA( $p, q$ ) procese i njihovu predikciju.

U drugom dijelu rada radimo analizu podataka dobivenih iz tajnih izvora jedne norveške bolnice. Radi se o vremenskom niz različitih vrsta pregleda u vremenskom intervalu od četrdeset dana. Iako uzorak nije ni približno dovoljan za analizu, nastojat ćemo primjeniti teoriju izloženu prije toga. Na temelju dobivenog uzorka, iako je njegova veličina malena, želimo pokazati da ARMA proces dobar model za predikciju budućih frekvencija pregleda (MR, CT, UZV, RG, Other).

# Poglavlje 1

## Stacionarni vremenski nizovi

### 1.1 Vremenski niz

Pretpostavimo da je  $n$ -dimenzionalni vektor stupac  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , vektor slučajnih varijabli ako drugačije ne specificiramo. Nadalje, pretpostavimo li da je  $S$  proizvoljan skup, koristimo izraz  $S_n$  što govori da se radi o skupu  $n$ -dimenzionalnih vektora stupaca sa vrijednostima u  $S$  i skupu od  $n$ -dimenzionalnih vektora redaka s vrijednostima u  $S$ .

**Definicija 1.1.1.** *Vremenski niz je skup opažanja  $x_t$  prikupljenih u određenom vremenskom trenutku  $t$ .*

Govorimo o diskretnom vremenskom nizu kada su opažanja prikupljena u diskretnim vremenskim trenucima, te neprekidnom vremenskom nizu kada su opažanja prikupljena u nekom neprekidnom vremenskom intervalu, npr. u  $[0, 1]$ . U slučaju neprekidnih opažanja koristit ćemo oznaku  $x(t)$  umjesto  $x_t$ . Nadalje, ovdje se ćemo se primarno baviti diskretnim vremenskim nizovima.

### 1.2 Stohastički procesi

Prvi korak u analizi vremenskog niza je odabir odgovarajućeg matematičkog modela (ili klase modela) za podatke. Da bi dopustili mogućnost nepredvidljive prirode budućih opažanja, prirodno je pretpostaviti da je svako opažanje  $x_t$  ostvarena vrijednost određene slučajne varijable  $X_t$ . Tada je vremenski niz  $\{x_t, t \in T_0\}$  realizacija familije slučajnih varijabli  $\{X_t, t \in T_0\}$ . Ovakvo razmatranje sugerira modeliranje podataka kao realizaciju stohastičkog procesa  $\{X_t, t \in T_0\}$  gdje je  $T$  nadskup skupa  $T_0$ .

**Definicija 1.2.1.** *Stohastički proces je familija slučajnih varijabli  $\{X_t, t \in T_0\}$  definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ .*

U analizi vremenskih nizova, indeksirani skup  $T$  je skup vremenskih trenutaka poput  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $[0, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$  i sl. Stohastički procesi u kojima  $T$  nije podskup skupa realnih brojeva  $\mathbb{R}$  su također važni (primjer je geofizički stohastički proces gdje je  $T$  površina sfere i predstavlja varijable indeksirane sa njihovom lokacijom na zemljinoj površini), ali ovdje će nam  $T$  uvijek biti podskup realnih brojeva  $\mathbb{R}$ .

Uzimajući u obzir definiciju slučajne varijable možemo primjetiti da je za svaki fiksni  $t \in T$ ,  $X_t$  zapravo funkcija  $X_t(\cdot)$  na skupu  $\Omega$ . Suprotno, za svaki fiksni  $\omega$  iz  $\Omega$ ,  $X_t(\omega)$  je funkcija na  $T$ .

**Definicija 1.2.2.** Funkcije  $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega\}$  na  $T$  su realizacije stohastičkog procesa, tj. uzorak procesa  $\{X_t, t \in T\}$ .

Najčešće smo u mogućnosti definirati  $X_t(\omega)$  eksplicitno za svaki  $t$  i  $\omega$ . Međutim, vrlo često želimo ili smo prisiljeni odrediti zbir svih zajedničkih distribucija svih konačno dimenzionalnih vektora  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ ,  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . U takvom slučaju moramo biti sigurni da stohastički proces s odabranom distribucijom zbilja postoji. Kolmogorovljev teorem, kojeg ćemo u nastavku iskazati, garantira da stohastički proces postoji pod minimalnim uvjetima na odabranu funkciju distribucije. Kolmogorovljev teorem malo pojednostavljujemo s pretpostavkom da je  $T$  podskup skupa realnih brojeva  $\mathbb{R}$ , stoga i linearno uređen skup. Kada  $T$  ne bi bio linearno uređen, potrebna je dodatna permutacija da bi dobili linearnu uređenost.

**Definicija 1.2.3.** Neka je  $\mathcal{T}$  skup svih vektora  $\{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in T^n : t_1 < \dots < t_n, n = 1, 2, \dots\}$ . Tada su konačno dimenzionalne funkcije distribucije od  $X_t, t \in T$  funkcije  $\{F_{\mathbf{t}}(\cdot), \mathbf{t} \in \mathcal{T}\}$  definirane za  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)'$  s

$$F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = P(X_{t_1} \leq \dots \leq X_{t_n}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

**Teorem 1.2.4.** (Kolmogorovljev teorem) Vjerojatnosne funkcije distribucije  $\{F_{\mathbf{t}}(\cdot), \mathbf{t} \in \mathcal{T}\}$  su funkcije distribucije stohastičkih procesa ako i samo ako za bilo koji  $n \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in T$  i  $1 \leq i \leq n$  vrijedi

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} F_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}(i)) \quad (1.2)$$

gdje su  $\mathbf{t}(i)$  i  $\mathbf{x}(i)$   $(n-1)$ -dimenzionalni vektori dobiveni brisanjem  $i$ -te komponente od  $\mathbf{t}$  i  $\mathbf{x}$ , respektivno.

Ako je  $\phi_t(\cdot)$ , karakteristična funkcija korespondentna sa  $F_{\mathbf{t}}(\cdot)$ , tj.

$$\phi_{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{u}'\mathbf{x}} F_{\mathbf{t}}(dx_1, \dots, dx_n), \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)' \in \mathbb{R}^n,$$

tada gornji limes možemo zapisati u ekvivalentnom obliku



$$\lim_{u_i \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{u}) = \phi_{t_i}(\mathbf{u}(i)), \quad (1.3)$$

gdje je  $\mathbf{u}(i)$   $(n - 1)$ -dimenzionalni vektor dobiven brisanjem  $i$ -te komponente od  $\mathbf{u}$ .

### 1.3 Stacionarnost i striktna stacionarnost

Kada imamo konačan broj slučajnih varijabli, korisno je izračunati kovarijacije, kako bi dobili uvid u zavisnost između slučajnih varijabli. Za vremenske nizove  $\{X_t, t \in T\}$ , proširit ćemo koncept kovarijacijske matrice kako bi mogli raditi sa beskonačnim kolekcijama slučajnih varijabli. Autokovarijacijska funkcija daje nam potrebno proširenje.

**Definicija 1.3.1.** *Ako je  $\{X_t, t \in T\}$  proces takav da je  $\text{Var}(X_t) < \infty$  za svaki  $t \in T$ , tada je autokovarijacijska funkcija  $\gamma_X(\cdot, \cdot)$  od  $\{X_t\}$  definirana s*

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - EX_r)(X_s - EX_s)], \quad r, s \in T. \quad (1.4)$$

**Definicija 1.3.2.** *Za vremenski niz  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , sa skupom indeksa  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , kažemo da je stacionaran ako vrijedi:*

- (i)  $E|X_t|^2 < \infty$  za svaki  $t \in \mathbb{Z}$
- (ii)  $EX_t = m$  za svaki  $t \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$  za svaki  $r, s, t \in \mathbb{Z}$

Ovako definirana stacionarnost u literaturi se često zove i slaba stacionarnost, stacionarnost u širokom smislu ili stacionarnost drugog reda.

Ako je  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  stacionaran, tada je  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0)$  za svaki  $r, s \in \mathbb{Z}$ , pa ćemo redefinirati autokovarijacijsku funkciju stacionarnog procesa kao funkciju jedne varijable

$$\gamma_X(h) \equiv \gamma_X(h, 0) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) \text{ za svaki } t, h \in \mathbb{Z}.$$

Funkcija  $\gamma_X(\cdot)$  je autokovarijacijska funkcija od  $\{X_t\}$  i  $\gamma_X(h)$  je njena vrijednost u pomaku  $h$ . Autokorelacijska funkcija (afc) od  $\{X_t\}$  je definirana kao funkcija čija je vrijednost u pomaku  $h$  dana s

$$\rho_X(h) \equiv \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \text{Corr}(X_{t+h}, X_t) \text{ za svaki } t, h \in \mathbb{Z}.$$

Primjetimo da smo stacionarnost definirali samo u slučaju kada je  $T = \mathbb{Z}$ . Nije teško definirati stacionarnost koristeći generalizirani skup indeksa, ali u naše svrhe to neće biti potrebno. Želimo li modelirati skup podataka  $\{x_t, t \in T \subseteq \mathbb{Z}\}$  kao realizaciju stacionarnog procesa, uvijek ga možemo smatrati dijelom realizacije stacionarnog procesa  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ .

Dajemo definiciju još jedne važne i često korištene stacionarnosti:

**Definicija 1.3.3.** Za vremenski niz  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  kažemo da je striktno ili jako stacionaran ako je zajednička distribucija od  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})'$  i  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})'$  jednaka za sve pozitivne cijele brojeve  $k$  i za sve  $t_1, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}$ .

Striktne stacionarnosti intuitivno znači da će grafovi realizacije vremenskog niza za dva jednako duga vremenska intervala imati slične statističke karakteristike. Na primjer, udio koordinata koje ne prelaze neku razinu  $x$  bi trebao biti isti za oba intervala.

Definicija 1.3.3. ekvivalentna je tvrdnji da  $(X_1, \dots, X_k)'$  i  $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})'$  imaju jednaku zajedničku distribuciju za sve pozitivne cijele brojeve  $k$  i sve cijele brojeve  $h$ .

### Veza između stacionarnosti i striktnosti stacionarnosti

Ako je  $\{X_t\}$  striktno stacionaran, to odmah povlači da, ako uzmemo  $k = 1$  u Definiciji 1.3.3.,  $X_t$  ima istu distribuciju za svaki  $t \in \mathbb{Z}$ . Kada je  $E|X_t|^2$  konačno, to implicira da su i  $EX_t$  i  $\text{Var}(X_t)$  obje konstante. Nadalje, ako uzmemo  $k = 2$  u Definiciji 1.3.3., vidimo da  $X_{t+h}$  i  $X_t$  imaju istu zajedničku distribuciju stoga i istu kovarijanciju za sve  $h \in \mathbb{Z}$ . Tada je striktno stacionaran proces sa konačnim drugim momentom stacionaran. No, obrat zadnje tvrdnje ne vrijedi. Na primjer, ako je  $\{X_t\}$  niz nezavisnih slučajnih varijabli koje su eksponencijalno distribuirane s očekivanjem 1 kada je  $t$  neparan i normalno distribuirane s očekivanjem i varijancom 1 kada je  $t$  paran, tada je  $\{X_t\}$  stacionaran s  $\gamma_X(0) = 1$  i  $\gamma_X(h) = 0$  za  $h \neq 0$ . Međutim, kako  $X_1$  i  $X_2$  imaju različite distribucije,  $\{X_t\}$  ne može biti striktno stacionaran.

Ipak, postoji slučaj kada stacionarnost implicira striktnu stacionarnost.

**Definicija 1.3.4.** Proces  $\{X_t\}$  je Gaussovski vremenski niz ako i samo ako su mu sve konačno dimenzionalne razdiobe višedimenzionalne normalne.

Ako je  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  stacionaran Gaussovski proces, tada je  $\{X_t\}$  striktno stacionaran, budući da za sve  $n \in \{1, 2, \dots\}$  i za sve  $h, t_1, t_2, \dots \in \mathbb{Z}$ , slučajni vektori  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$  i  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})'$  imaju isto očekivanje i kovarijacijsku matricu, stoga imaju i istu distribuciju.

Stacionarni procesi imaju ključnu ulogu u analizi vremenskih nizova. Naravno da mnogi promatrani vremenski nizovi izgledom nisu stacionarni. Često se takvi podaci transformiraju različitim tehnikama, koje ćemo u nastavku spomenuti, u nizove koje možemo modelirati kao realizacije nekih stacionarnih procesa. Teorija stacionarnih procesa se koristi za analizu, fitanje i predikciju dobivenih nizova. Od svih tehnika, autokovarijacijska funkcija je primarno sredstvo.

## 1.4 Procjena i eliminacija trenda i sezonalnosti

Prvi korak u analizi bilo kojeg vremenskog niza je grafički prikazati podatke. Ako postoje očite nepovezanosti u nizovima, poput nagle promjene razine, preporuča se analizirati niz na način da se podijeli u homogene dijelove. Ako postoje udaljena opažanja, ona bi se trebala pažljivo proučiti i provjeriti da li postoji razlog za njihovo odbacivanje (na primjer ako je opažanje zabilježeno greškom od nekog dugog procesa). Grafički test također može sugerirati mogućnost prezentiranja podataka kao realizacije procesa (model klasične dekompozicije)

$$X_t = m_t + s_t + Y_t \quad (1.5)$$

gdje je  $m_t$  funkcija koja se sporo mijenja poznata kao komponenta trenda,  $s_t$  funkcija s poznatim periodom  $t$  znana kao komponenta sezonalnosti, i  $Y_t$  je slučajni šum koji je stacionaran proces. Ako se sezonalne fluktuacije i fluktuacije šuma povećavaju sa razinom procesa, tada se često koristi preliminarna transformacija podataka kako bi transformirani podaci bili kompatibilni sa modelom.

Naš cilj je procijeniti i odrediti determinističke komponente  $m_t$  i  $s_t$  u nadi da rezidual ili komponenta šuma  $Y_t$  bude stacionaran slučajan proces. Tada možemo koristiti teoriju takvih procesa kako bi pronašli zadovoljavajući vjerojatnosni model za takav proces  $\{Y_t\}$ , analizirati njegova svojstva te ga koristiti u kombinaciji s  $m_t$  i  $s_t$ , i to u svrhu predikcije i kontrole  $\{X_t\}$ .

Alternativni pristup, intenzivno razvijen od strane Boxa i Jenkinsa (1970), je višestruka primjena diferencijskih operatora na podacima  $\{x_t\}$  sve dok diferencirana opažanja ne nalikuju realizaciji nekog stohastičkog procesa  $\{W_t\}$ . Tada možemo koristiti teoriju stacionarnih procesa za modeliranje, analizu i predikciju  $\{W_t\}$ , stoga i originalnog procesa.

Dva pristupa uklanjanja trenda i sezonalnosti: (a) procjena  $m_t$  i  $s_t$  iz dekompozicije 1.5, i (b) diferenciranje podataka  $\{x_t\}$ , ukratko ćemo iznijeti u nastavku.

### Uklanjanje trenda uz odsutnost sezonalnosti

Uz odsutnost komponente sezonalnosti model 1.5 postaje

$$X_t = m_t + Y_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

gdje bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $EY_t = 0$ .

**Metoda 1:** (procjena metodom najmanjih kvadrata za  $m_t$ ) U ovom postupku želimo prilagoditi parametarsku familiju funkcija, na primjer

$$m_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (1.7)$$

podacima na način da odaberemo parametre, u ovoj ilustraciji  $a_0, a_1$  i  $a_2$ , da bi minimizirali  $\sum_t (x_t - m_t)^2$ .

**Metoda 2:** (zaglađivanje metodom linearnog filtera) Neka je  $q$  nenegativan cijeli broj i uzmimo u obzir dvostranost procesa promjenjivog prosjeka,

$$W_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad (1.8)$$

procesa  $\{X_t\}$  definiranog sa 1.6. Tada je za  $q + 1 \leq t \leq n - q$

$$W_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q m_{t+j} + (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q Y_{t+j} \simeq m_t \quad (1.9)$$

pretpostavljajući da je  $m_t$  približno linearan na intervalu  $[t - q, t + q]$  i da je prosjek grešaka na tom intervalu blizu nula.

MA nam daje procjene

$$\hat{m}_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad q + 1 \leq t \leq n - q \quad (1.10)$$

Kako  $X_t$  nema opažanje za  $t \leq 0$  i  $t > n$ , ne možemo koristiti 1.10 za  $t \leq q$  ili  $t > n - q$ . Program smooth (zaglađivanja) rješava taj problem na način da definira  $X_t = X_1$  za  $t < 1$  i  $X_t = X_n$  za  $t > n$ . Za bilo koji fiksni  $a \in [0, 1]$ , jednostrani proces promjenjivog prosjeka  $\hat{m}_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ , definiran rekurzijom

$$\hat{m}_t = aX_t + (1 - a)\hat{m}_{t-1}, \quad t = 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

i

$$\hat{m}_1 = X_1, \quad (1.12)$$

može biti izračunat koristeći program smooth (tj. zaglađivanja). Primjenu 1.11 i 1.12 često nazivamo eksponencijalno zaglađivanje.

Korisno je razmišljati o  $\{\hat{m}_t\}$  u 1.10 kao procesu proizašlom iz  $\{X_t\}$  primjenom linearnog operatora ili linearnog filtera  $\hat{m}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t+j}$  sa ponderima  $a_j = (2q + 1)^{-1}$ ,  $-q \leq j \leq q$ ,  $a_j = 0$  za sve  $|j| > q$ . Ovaj filter je "low-pass" filter budući da uzima podatke  $\{x_t\}$  i uklanja jako fluktuirajuću (visoko frekventnu) komponentu  $\{\hat{Y}_t\}$ , i ostavlja sporo varirajuću procjenu trenda  $\{m_t\}$ .

Specifičan filter (1.10) je jedan od mnogih koji se mogu koristiti za zaglađivanje. Za velike  $q$ , ako pretpostavimo  $(2q + 1)^{-1} \sum_{i=-q}^q Y_{t+i} \simeq 0$ , neće samo umanjiti šum već će u isto vrijeme dopustiti funkciji linearnog trenda  $m_t = a_t + b$  da prođe bez deformacija. Međutim, moramo biti svjesni da biranjem prevelikog  $q$ , ako  $m_t$  nije linearan, filtrirani proces, iako zaglađen, neće biti dobar za procjenu  $m_t$ . Pametnim izborom koeficijenata  $\{a_j\}$  moguće je kreirati filter koji ne samo da će biti efikasan u uklanjanju šuma iz podataka, već će

dopuštati veću klasu funkcija trenda (na primjer svi polinomi stupnja manjeg ili jednakog tri) da prođu neiskrivljene kroz filter.

**Metoda 3:** (diferenciranjem do generaliziranih stacionarnih podataka) Umjesto namjere da uklonimo trend zaglađivanjem kao u prethodnoj metodi, želimo diferenciranjem ukloniti trend. Definiramo prvi operator diferenciranja  $\nabla$  s

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t \quad (1.13)$$

gdje je  $B$  operator pomaka unatrag

$$BX_t = X_{t-1} \quad (1.14)$$

Snaga operatora  $B$  i  $\nabla$  je očita:  $B^j(X_t) = X_{t-j}$  i  $\nabla^j(X_t) = \nabla(\nabla^{j-1}(X_t))$ ,  $j \geq 1$  i  $\nabla^0(X_t) = X_t$ . Potencije u  $B$  i  $\nabla$  ponašaju se na isti način kao i potencije u polinomijalnim funkcijama realne varijable:

$$\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla X_t) = (1 - B)(1 - B)X_t = (1 - 2B + B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Ako operator  $\nabla$  primjenimo na linearnu funkciju trenda  $m_t = at + b$ , tada dobivamo konstantnu funkciju  $\nabla m_t = a$ . Na isti način bilo koji polinomijalni trend stupnja  $k$  može biti reduciran na konstantu primjenom operatora  $\nabla^k$ .

Krenemo li od modela  $X_t = m_t + Y_t$  gdje je  $m_t = \sum_{j=0}^k a_j t^j$  i  $Y_t$  stacionaran sa očekivanjem nula, dobivamo

$$\nabla^k X_t = k!a_k + \nabla^k Y_t,$$

stacionaran proces s očekivanjem  $k!a_k$ . Ovo razmatranje sugerira mogućnost, s obzirom na bilo koji niz podataka  $\{x_t\}$ , primjene operatora  $\nabla$  dok ne dobijemo niz  $\{\nabla^k x_t\}$  kojeg uvjerljivo možemo modelirati kao realizaciju stacionarnog procesa. Često u praksi nailazimo da je stupanj diferenciranja  $k$  dosta mali, najčešće jedan ili dva, što naravno ovisi o činjenici da mnoge funkcije možemo dobro aproksimirati na konačnom intervalu.

## Eliminacija trenda i senzonalnosti

Prethodno opisane metode za uklanjanje trenda prirodno se mogu proširiti na eliminaciju trenda i senzonalnosti u generaliziranom modelu

$$X_t = m_t + s_t + Y_t \quad (1.15)$$

gdje je  $EY_t = 0$ ,  $s_{t+d} = s_t$  i  $\sum_{j=1}^d s_j = 0$ .

Metode ćemo objasniti kroz primjer u kojem je period komponente senzonalnosti  $d = 12$ . Podatke indeksiramo godišnje i mjesečno:  $x_{j,k}$  gdje je  $j = 1, \dots, 6$ ,  $k = 1, \dots, 12$ , odnosno, definiramo

$$x_{j,k} = x_{k+12(j-1)}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, 12.$$

**Metoda 1:** (metoda malog trenda) Ako je trend malen, nije nerazumljivo pretpostaviti da je trend konstantan, na primjer  $m_j$  za  $j$ -tu godinu. Budući da je  $\sum_{k=1}^{12} s_k = 0$ , to nas dovodi do prirodne nepristrane procjene:

$$\hat{m}_j = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{12} x_{j,k} \quad (1.16)$$

dok za  $s_k, k = 1, \dots, 12$ , imamo sljedeće procjene

$$\hat{s}_k = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 (x_{j,k} - \hat{m}_j) \quad (1.17)$$

što automatski zadovoljava zahtjev da  $\sum_{k=1}^{12} \hat{s}_k = 0$ . Procijenjena greška za mjesec  $k$   $j$ -te godine je

$$\hat{Y}_{j,k} = x_{j,k} - \hat{m}_j - \hat{s}_k, \quad j = 1, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, 12 \quad (1.18)$$

Generalizacija 1.16 - 1.18 za podatke sa periodom sezonalnosti većim od 12 je očita.

**Metoda 2:** (metoda pomičnih zareza) Ova metoda je više preferirana u odnosu na Metodu 1 budući da se ne oslanja na pretpostavku da je  $m_t$  gotovo konstantan tokom svakog ciklusa.

Pretpostavimo da imamo opažanja  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Procijenimo trend primjenom MA filtera posebno odabranog za uklanjanje sezonalne komponente i šuma. Ako je period  $d$  paran, npr.  $d = 2q$ , tada koristimo

$$\hat{m}_t = \frac{0.5x_{t-q} + x_{t-q+1} + \dots + x_{t+q-1} + 0.5x_{t+q}}{d}, \quad q < t \leq n - q. \quad (1.19)$$

Inače ako je period prost, npr.  $d = 2q + 1$ , tada koristimo jednostavan MA 1.10.

Idući korak je procjena sezonalne komponente. Za svaki  $k = 1, \dots, d$ , računamo prosječan  $w_k$  devijacija  $\{(x_{k+jd} - \hat{m}_{k+jd}) : q < k + jd \leq n - q\}$ . Budući da prosjeci devijacija u sumi nisu nužno nula, procjenjujemo sezonalnu komponentu  $s_k$  sa

$$\hat{s}_k = w_k - d^{-1} \sum_{i=1}^d w_i, \quad k = 1, \dots, d, \quad (1.20)$$

i  $\hat{s}_k = \hat{s}_{k-d}, k > d$ .

Podatke s uklonjenom sezonalnošću redefiniramo kao originalan niz koji nema sezonalnu komponentu:

$$d_t = x_t - \hat{s}_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

Naposljeku, ponovo procjenjujemo trend od  $\{d_t\}$  bilo primjenom MA filtera opisanog ranije na podatke bez sezonalnosti ili prilagodbom/fitanjem polinoma za niz  $\{d_t\}$ . Procjena šuma sada je:

$$\hat{Y}_t = x_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

**Metoda 3:** (diferenciranje u pomaku  $d$ ) Tehnika diferenciranja koju smo ranije primijenili na podatke bez sezonalnosti, može biti proširena tako da je možemo koristiti za podatke sa sezonalnom komponentom i periodom  $d$  primjenjujući operator diferenciranja  $\nabla_d$  koji je definiran sa

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t. \quad (1.22)$$

Upravo definirani operator ne smijemo miješati sa operatorom diferenciranja  $\nabla^d = (1 - B)^d$  koji smo definirali ranije. Primjenom operatora  $\nabla_d$  na model

$$X_t = m_t + s_t + Y_t$$

gdje  $\{s_t\}$  ima period  $d$ , dobivamo

$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d}$$

što nam daje dekompoziciju diferencije  $\nabla_d X_t$  na komponentu trenda  $m_t - m_{t-d}$  i komponentu šuma  $Y_t - Y_{t-d}$ . Komponentu trenda možemo ukloniti sa ranije opisanim metodama.

## 1.5 Autokovarijacijska funkcija stacionarnog procesa

Dat ćemo svojstva autokovarijacijske funkcije koju smo definirali ranije.

**Propozicija 1.5.1.** *Ako je  $\gamma(\cdot)$  autokovarijacijska funkcija stacionarnog procesa  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , tada vrijedi*

$$\gamma(0) \geq 0, \quad (1.23)$$

$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \text{ za svaki } h \in \mathbb{Z}, \quad (1.24)$$

*i ako je  $\gamma(\cdot)$  parna tada*

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \text{ za svaki } h \in \mathbb{Z}. \quad (1.25)$$

*Dokaz.* Prvo svojstvo proizlazi iz definicije i vrijedi zbog  $\text{Var}(X_t) \geq 0$ , drugo je direktna posljedica Cauchy-Schwarzove nejednakosti:

$$|\text{Cov}(X_{t+h}, X_t)| \leq (\text{Var}(X_{t+h}))^{1/2} (\text{Var}(X_t))^{1/2}$$

dok treća vrijedi zbog

$$\gamma(-h) = \text{Cov}(X_{t-h}, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h).$$

□

**Definicija 1.5.2.** Za realnu funkciju na skupu cijelih brojeva  $\kappa : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , kažemo da je pozitivno semidefinitna ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i,j=1}^n a_i \kappa(t_i - t_j) a_j \geq 0 \quad (1.26)$$

za sve pozitivne cijele brojeve  $n$  i za svaki vektor  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in \mathbb{Z}^n$  ili ako isamo ako  $\sum_{i,j=1}^n a_i \kappa(i - j) a_j \geq 0$  za svaki  $n$  i  $\mathbf{a}$ .

**Teorem 1.5.3.** (Karakterizacija autokovarijacijske funkcije) Realna funkcija definirana na cijelim brojevima je autokovarijacijska funkcija stacionarnog procesa ako i samo ako je parna i pozitivno semidefinitna.

Za svaku autokovarijacijsku funkciju  $\gamma(\cdot)$  postoji stacionaran Gussovski vremenski niz sa  $\gamma(\cdot)$  kao kovarijacijskom funkcijom. Da bi dokazali da je dana funkcija pozitivno semidefinitna, ponekad je lakše odrediti stacionarni proces za danu autokovarijacijsku funkciju nego zadovoljiti definiciju pozitivne semidefinitnosti.

Autokorelacijska funkcija  $\rho(\cdot)$  ima sva svojstva kao i autokovarijacijska funkcija i zadovoljava dodatan uvjet  $\rho(0) = 1$ .

## Uzoračka autokovarijacijska funkcija opaženog niza podataka

Iz opažanja  $\{x_1, \dots, x_n\}$  stacionarnog vremenskog niza  $\{X_t\}$ , često želimo procijeniti autokovarijacijsku funkciju  $\gamma(\cdot)$  procesa  $\{X_t\}$  u svrhu dobivanja informacija o njegovoj strukturi. To je važan korak u konstruiranju prikladnog matematičkog modela za podatke. Procjena  $\gamma(\cdot)$  koju bi trebali koristiti je uzoračka autokovarijacijska funkcija.

**Definicija 1.5.4.** Uzoračku autokovarijacijsku funkciju niza  $\{x_1, \dots, x_n\}$  definiramo sa

$$\hat{\gamma}(h) := n^{-1} \sum_{j=1}^{n-h} (x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}), \quad 0 \leq h < n, \quad (1.27)$$

i  $\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h)$ ,  $-n < h \leq 0$ , gdje je  $\bar{x}$  aritmetička sredina  $\bar{x} = n^{-1} \sum_{j=1}^n x_j$ .

U nazivniku radije koristimo  $n$  u odnosu na  $n-h$  budući da nam to osigurava da matrica  $\hat{\Gamma}_n = [\hat{\gamma}(i-j)]_{i,j=1}^n$  bude pozitivno semidefinitna.

Uzoračka autokorelacijska funkcija definirana je u terminima uzoračke autokovarijacijske funkcije kao

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad |h| < n,$$



a odgovarajuća matrica  $\hat{R}_n = [\hat{\rho}(i-j)]_{i,j=1}^n$  je također pozitivno semidefinitna. Uzoračka autokovarijacijska i autokorelacijska funkcija mogu biti određene za bilo koji set podataka  $\{x_1, \dots, x_n\}$  i nisu ograničene na realizacije stacionarnog procesa. Za podatke koji imaju trend,  $|\hat{\rho}(h)|$  će pokazivati spor pad kako se  $h$  povećava, i za podatke koji imaju pediodičnu komponentu,  $\rho(h)$  će se slično ponašati s istim periodom. Prema tome,  $\rho(\cdot)$  može biti koristan indikator (ne)stacionarnosti.

## 1.6 Višedimenzionalna normalna distribucija

$n$ -dimenzionalan slučajan vektor je vektor stupac,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ , čija je svaka komponenta slučajna varijabla. Ako je  $E|X_i| < \infty$  za svaki  $i$ , tada definiramo očekivanu vrijednost od  $\mathbf{X}$  kao vektor stupac

$$\mu_{\mathbf{X}} = E\mathbf{X} = (EX_1, \dots, EX_n)'. \quad (1.28)$$

Na isti način definiramo očekivanu vrijednost bilo kojeg niza čiji su elementi slučajne varijable (npr. matrica slučajnih varijabli) i to je isti niz gdje je svaka slučajna varijabla zamijenjena svojom očekivanom vrijednosti (pod pretpostavkom da one postoje). Ako su  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$  i  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)'$  slučajni vektori takvi da  $E|X_i|^2 < \infty, i = 1, \dots, n$  i  $E|Y_i|^2 < \infty, i = 1, \dots, m$ , možemo definirati kovarijacijsku matricu od  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{Y}$  kao matricu

$$\Sigma_{\mathbf{XY}} = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{Y} - E\mathbf{Y})'] = E(\mathbf{XY}') - (E\mathbf{X})(E\mathbf{Y})' \quad (1.29)$$

$(i, j)$ -ti element matrice  $\Sigma_{\mathbf{XY}}$  je kovarijanca,  $\text{Cov}(X_i, Y_j) = E(X_i Y_j) - E(X_i)E(Y_j)$ . U posebnom slučaju kada je  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ ,  $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  se reducira na kovarijacijsku matricu od  $\mathbf{X}$ .

## Poglavlje 2

# Hilbertovi prostori

Iako je moguće proučavati i analizirati vremenske nizove bez eksplicitnog korištenja terminologije i tehnika Hilbertovih prostora, postoje mnoge prednosti koje možemo dobiti iz njihove formulacije. Oni su uvelike izvedeni iz naše poznate dvodimenzionalne i trodimenzionalne Euklidske geometrije, a posebno s konceptima ortogonalnosti i ortogonalnih projekcija u tim prostorima. Ove koncepti, primjereno prošireni na beskonačno dimenzionalne Hilbertove prostore, imaju središnju ulogu u proučavanju slučajnih varijabli s konačnim drugim momentom, osobito u teoriji predikcije stacionarnih procesa. Intuicija dobivena iz Euklidske geometrije koristi se kako bi učinila naizgled komplicirane algebarske rezultate u analizi vremenskih nizova geometrijski očitima. Također se često koristi kao vrijedan vodič u razvoju i izgradnji algoritama. Stoga ćemo u ovom poglavlju dati mali uvod u teoriju Hilbertovih prostora kroz nekoliko definicija, teorema i propozicija bez dokaza, koji su potrebni za geometrijsko razumijevanje kasnijih poglavlja.

### 2.1 Unitarni prostor i njegova svojstva

**Definicija 2.1.1.** Za kompleksni vektorski prostor  $\mathcal{H}$  kažemo da je unitaran prostor ako za svaki par elemenata  $x$  i  $y \in \mathcal{H}$  postoji kompleksni broj  $\langle x, y \rangle$ , kojeg nazivamo skalarni produkt od  $x$  i  $y$ , za koji vrijedi:

- (a)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- (b)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  za svaki  $x, y, z \in \mathcal{H}$
- (c)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  za svaki  $x, y \in \mathcal{H}$  i  $\alpha \in \mathbb{C}$
- (d)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  za svaki  $x \in \mathcal{H}$
- (e)  $\langle x, y \rangle = 0$  ako i samo ako je  $x = 0$

Realni vektorski prostor  $\mathcal{H}$  je unitaran prostor ako za svaki  $x, y \in \mathcal{H}$  postoji realan broj  $\langle x, y \rangle$  koji zadovoljava gornje uvjete iz definicije, pri čemu se uvjet (a) reducira na slučaj  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .

Unitarni prostor je prirodna generalizacija skalarnog produkta dva vektora u  $n$ -dimenzionalnom Euklidskom prostoru. Budući da se mnoga svojstva Euklidskog prostora prenose na unitaran prostor, korisno je imati na umu Euklidski prostor.

**Definicija 2.1.2.** Norma elementa  $x$  unitarnog prostora definira se kao

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (2.1)$$

U Euklidskom prostoru  $\mathbb{R}^k$  norma vektora je jednostavno njegova duljina  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ .  
*Cauchy-Schwarzova nejednakost:* Ako je  $\mathcal{H}$  unitaran prostor, tada vrijedi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \text{ za svaki } x, y \in \mathcal{H} \quad (2.2)$$

i

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \text{ ako i samo ako je } x = y \langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle \quad (2.3)$$

*Nejednakost torkuta:* Ako je  $\mathcal{H}$  unitaran prostor, tada vrijedi

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ za svaki } x, y \in \mathcal{H} \quad (2.4)$$

**Propozicija 2.1.3.** (Svojstva norme) *Ako je  $\mathcal{H}$  kompleksan (realan) unitaran prostor i  $\|x\|$  je definirana kao u 2.1, tada vrijede sljedeća svojstva:*

- (a)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  za svaki  $x, y \in \mathcal{H}$
- (b)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  za svaki  $x \in \mathcal{H}$  i za sve  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
- (c)  $\|x\| \geq 0$  za svaki  $x \in \mathcal{H}$
- (d)  $\|x\| = 0$  ako i samo ako  $x = 0$

*Pravilo paralelograma:* Ako je  $\mathcal{H}$  unitaran prostor, tada vrijedi

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \text{ za svaki } x, y \in \mathcal{H}$$

**Definicija 2.1.4.** Niz  $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$  elemenata unitarnog prostora  $\mathcal{H}$  konvergira po normi prema  $x \in \mathcal{H}$  ako  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$ .

**Propozicija 2.1.5.** (Neprekidnost skalarnog produkta) *Ako su  $\{x_n\}$  i  $\{y_n\}$  nizovi čiji elementi su iz unitarnog prostora  $\mathcal{H}$  takvi da  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  i  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$  gdje su  $x, y \in \mathcal{H}$ , tada vrijedi*

- (a)  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ ,
- (b)  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

## 2.2 Hilbertovi prostori

Unitaran prostor s dodatnim svojstvom potpunosti zovemo Hilbertovim prostorom. Da bi definirali potpunost prostora, najprije moramo definirati koncept Cauchyjevog niza.

**Definicija 2.2.1.** Niz  $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$  elemenata unitarnog prostora je Cauchyjev niz ako vrijedi

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \text{ kada } m, n \rightarrow \infty$$

odnosno ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji pozitivan cijeli broj  $N(\epsilon)$  takav da vrijedi

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon \text{ za svaki } m, n > N(\epsilon)$$

**Definicija 2.2.2.** Hilbertov prostor  $\mathcal{H}$  je unitaran potpuni prostor, odnosno unitaran prostor u kojem svaki Cauchyjev niz  $\{x_n\}$  konvergira po normi u neki element  $x \in \mathcal{H}$ .

Primjeri Hilbertovih prostora su Euklidski prostori,  $\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^k$ , prostor slučajnih varijabli koje imaju konačan drugi moment  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , kompleksni  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostori kod kojih je skalarni produkt definiran kao očekivanje umnoška dviju kompleksnih slučajnih varijabli  $\langle X, Y \rangle = E(X\bar{Y})$ , a  $\mu$  konačna ne-nul mjera na izmjerivom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Izraze  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  i  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ćemo rezervirati za realne Hilbertove prostore ukoliko drugačije ne napomenemo.

**Propozicija 2.2.3.** (konvergencija po normi i Cauchyjev kriterij) Ako je  $\{x_n\}$  niz elemenata iz Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$ , tada  $\{x_n\}$  konvergira po normi ako i samo ako  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$  kada  $m, n \rightarrow \infty$ .

## 2.3 Teorem o projekciji

Prije nego iskažemo teorem o projekciji za generalizirani Hilbertov prostor, potrebno je uvesti novu terminologiju.

**Definicija 2.3.1.** Linearni potprostor  $\mathcal{M}$  Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  je zatvoren potprostor od  $\mathcal{H}$  ako  $\mathcal{M}$  sadrži sve svoje rubne točke, odnosno ako je  $x_n \in \mathcal{M}$  i  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ , to implicira da je  $x \in \mathcal{M}$ .

**Definicija 2.3.2.** Ortogonalni komplement podskupa  $\mathcal{M}$  od  $\mathcal{H}$  definiran je kao skup  $\mathcal{M}^\perp$  svih elemenata od  $\mathcal{H}$  koji su ortogonalni na svaki element iz  $\mathcal{M}$ . Prema tome,

$$x \in \mathcal{M}^\perp \text{ ako i samo ako je } \langle x, y \rangle = 0 \text{ (} x \perp y \text{) za svaki } y \in \mathcal{M} \quad (2.5)$$

**Propozicija 2.3.3.** Ako je  $\mathcal{M}$  bilo koji podskup Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  tada je  $\mathcal{M}^\perp$  zatvoreni podskup od  $\mathcal{H}$ .

**Teorem 2.3.4.** (Teorem o projekciji) *Ako je  $\mathcal{M}$  zatvoreni podskup Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  i  $x \in \mathcal{H}$ , tada*

(i) *postoji jedinstveni element  $\hat{x} \in \mathcal{M}$  takav da vrijedi*

$$\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\| \quad (2.6)$$

(ii)  *$x \in \mathcal{M}$  i  $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$  ako i samo ako je  $\hat{x} \in \mathcal{M}$  i  $(x - \hat{m}) \in \mathcal{M}^\perp$*

*Element  $\hat{m}$  zovemo ortogonalna projekcija od  $x$  na  $\mathcal{M}$ .*

**Korolar 2.3.5.** (Preslikavanje projekcije od  $\mathcal{H}$  na  $\mathcal{M}$ ) *Ako je  $\mathcal{M}$  zatvoreni podskup Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  i  $I$  je jedinično preslikavanje na  $\mathcal{H}$ , tada postoji jedinstveno preslikavanje  $P_{\mathcal{M}}$  od  $\mathcal{H}$  na  $\mathcal{M}$  takvo da  $I - P_{\mathcal{M}}$  preslikava  $\mathcal{H}$  na  $\mathcal{M}^\perp$ .  $P_{\mathcal{M}}$  zovemo preslikavanje projekcije od  $\mathcal{H}$  na  $\mathcal{M}$ .*

**Propozicija 2.3.6.** (Svojstva preslikavanja projekcije) *Neka je  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor i neka je  $P_{\mathcal{M}}$  preslikavanje projekcije na zatvoreni podskup  $\mathcal{M}$ . Tada vrijedi*

(i)  $P_{\mathcal{M}}(\alpha x + \beta y) = \alpha P_{\mathcal{M}}x + \beta P_{\mathcal{M}}y$ ,  $x, y \in \mathcal{H}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,

(ii)  $\|x\|^2 = \|P_{\mathcal{M}}x\|^2 + \|(I - P_{\mathcal{M}})x\|^2$

(iii) *svaki  $x \in \mathcal{H}$  ima jedinstveni rastav na elemente iz  $\mathcal{M}$  i elemente iz  $\mathcal{M}^\perp$ , tj.*

$$x = P_{\mathcal{M}}x + (I - P_{\mathcal{M}})x, \quad (2.7)$$

(iv)  $P_{\mathcal{M}}x_n \rightarrow P_{\mathcal{M}}x$  ako  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$

(v)  $x \in \mathcal{M}$  ako i samo ako  $P_{\mathcal{M}}x = x$

(vi)  $x \in \mathcal{M}^\perp$  ako i samo ako  $P_{\mathcal{M}}x = 0$

(vii)  $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$  ako i samo ako  $P_{\mathcal{M}_1}P_{\mathcal{M}_2}x = P_{\mathcal{M}_1}x$  za svaki  $x \in \mathcal{H}$

*Jednadžbe predikcije:* za dani Hilbertov prostor  $\mathcal{H}$ , zatvoreni podskup  $\mathcal{M}$  i bilo koji element  $x \in \mathcal{H}$ , teorem o projekciji pokazuje da element iz  $\mathcal{M}$  najbliži  $x$  je jedinstveni element  $\hat{x} \in \mathcal{M}$  takav da vrijedi

$$\langle x - \hat{x}, y \rangle = 0 \text{ za sve } y \in \mathcal{M}. \quad (2.8)$$

Zadnji izraz ćemo često koristiti, interpretirajući pri tome  $\hat{x} = P_{\mathcal{M}}x$  kao najbolji prediktor od  $x$  u potprostoru  $\mathcal{M}$ .

## 2.4 Ortonormalni skupovi

**Definicija 2.4.1.** *Zatvorena linearna ljuska  $\overline{\text{sp}}\{x_t, t \in T\}$  bilo kojeg podskupa od  $\{x_t, t \in T\}$  Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  je definiran kao najmanji zatvoren podskup od  $\mathcal{H}$  koji sadrži svaki element  $x_t, t \in T$ .*

Zatvorena linearna ljuska konačnog skupa  $\{x_1, \dots, x_n\}$  je skup svih linearnih kombinacija  $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  (ili  $\mathbb{R}$  ako je  $\mathcal{H}$  realan). Ako je  $\mathcal{M} = \overline{\text{sp}}\{x_1, \dots, x_n\}$ , tada za bilo koji dani  $x \in \mathcal{H}$ ,  $P_{\mathcal{M}}x$  je jedinstveni element oblika

$$P_{\mathcal{M}}x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

takav da

$$\langle x - P_{\mathcal{M}}x, y \rangle = 0, \quad y \in \mathcal{M}$$

ili ekvivalentno takav da

$$\langle P_{\mathcal{M}}x, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Gornja jednačba može biti zapisana kao skup linearnih jednačbi za  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , tj.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Prema teoremu o projekciji gornji sustav ima barem jedno rješenje za  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Jedinstvenost  $P_{\mathcal{M}}x$  implicira da sva rješenja gornjeg sustava moraju dati isti element  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ .

**Definicija 2.4.2.** *Za skup  $\{e_t, t \in T\}$  elemenata unitarnog prostora kažemo da je ortonormalan ako za svaki  $s, t \in T$  vrijedi*

$$\langle e_s, e_t \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ako je } s = t, \\ 0, & \text{ako je } s \neq t, \end{cases} \quad (2.11)$$

**Teorem 2.4.3.** *Ako je  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ortonormalan podskup Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{M} = \overline{\text{sp}}\{e_1, \dots, e_k\}$ , tada je*

$$P_{\mathcal{M}}x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i \text{ za sve } x \in \mathcal{H} \quad (2.12)$$

$$\|P_{\mathcal{M}}x\|^2 = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 \text{ za sve } x \in \mathcal{H} \quad (2.13)$$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^k c_i e_i \right\| \text{ za sve } x \in \mathcal{H} \quad (2.14)$$

i za sve  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$  (ili  $\mathbb{R}$  ako je  $\mathcal{H}$  realan). Jednakost vrijedi u 2.14 ako i samo ako je  $c_i = \langle x, e_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Korolar 2.4.4.** (Besselova nejednakost) Ako je  $x$  bilo koji element Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  i  $\{e_1, \dots, e_k\}$  je ortonormalan podskup od  $\mathcal{H}$ , tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (2.15)$$

**Definicija 2.4.5.** Ako je  $\{e_t, t \in T\}$  ortonormalni podskup Hilbertovog prostora  $\mathcal{H}$  i  $M = \overline{\text{sp}}\{e_t, t \in T\}$ , tada kažemo da je  $\{e_t, t \in T\}$  potpuni ortonormalni skup ili ortonormalna baza za  $\mathcal{H}$ .

**Definicija 2.4.6.** Hilbertov prostor je separabilan ako je  $\mathcal{H} = \overline{\text{sp}}\{e_t, t \in T\}$  sa  $\{e_t, t \in T\}$  konačan ili prebrojivo beskonačan ortonormalan skup.

**Teorem 2.4.7.** Ako je  $\mathcal{H}$  separabilan Hilbertov prostor  $\mathcal{H} = \overline{\text{sp}}\{e_1, e_2, \dots\}$  gdje je  $\{e_i, i = 1, 2, \dots\}$  ortonormalan skup, tada je

- (i) skup svih konačnih linearnih kombinacija od  $\{e_1, e_2, \dots\}$  gust u  $\mathcal{H}$ , odnosno za svaki  $x \in \mathcal{H}$  i  $\epsilon > 0$ , postoji pozitivan cijeli broj  $k$  i konstante  $c_1, \dots, c_k$  takve da

$$\left\| x - \sum_{i=1}^k c_i e_i \right\| < \epsilon, \quad (2.16)$$

- (ii)  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$  za svaki  $x \in \mathcal{H}$ , tj.  $\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i\| \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$ ,

- (iii)  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$  za svaki  $x \in \mathcal{H}$ ,

- (iv)  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$  za svaki  $x, y \in \mathcal{H}$ , i

- (v)  $x = 0$  ako i samo ako  $\langle x, e_i \rangle = 0$  za svaki  $i = 1, 2, \dots$

Točka (iv) poznata je još kao Parsevalova jednakost.

Separabilne Hilbertove prostore često susrećemo kao zatvorene linearne ljuske prebrojivih podskupova od mogućih neseparabilnih Hilbertovih prostora.

## 2.5 Projekcija u $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (2.17)$$

pripadajućom kvadratnom normom

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (2.18)$$

i kutom između  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right\} \quad (2.19)$$

Svaki zatvoreni podprostor  $\mathcal{H}$  Hilbertovog prostora  $\mathbb{R}^n$  može se izraziti preko Gram-Schmidtove ortogonalizacije kao  $\mathcal{M} = \overline{\text{sp}}\{e_1, \dots, e_m\}$  gdje je  $\{e_1, \dots, e_m\}$  ortonormalan podskup od  $\mathcal{M}$  i  $m (\leq n)$  zovemo dimenzijom od  $\mathcal{M}$ . Ako je  $m < n$  tada postoji ortonormalan podskup  $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  od  $\mathcal{M}^\perp = \overline{\text{sp}}\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ . Iz propozicije 2.3.6. (iii) svaki  $x \in \mathbb{R}^n$  može biti jedinstveno prikazan kao suma dva elementa od  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{M}^\perp$  respektivno:

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{M}}\mathbf{x} + (I - P_{\mathcal{M}})\mathbf{x}, \quad (2.20)$$

gdje iz teorema 2.4.3. dobivamo

$$P_{\mathcal{M}}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \quad (2.21)$$

i

$$(I - P_{\mathcal{M}})\mathbf{x} = \sum_{i=m+1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i. \quad (2.22)$$

Sljedeći teorem omogućuje nam računanje  $P_{\mathcal{M}} x$  direktno iz bilo kojeg skupa vektora  $\{x_1, \dots, x_m\}$  koji razapinje  $\mathcal{M}$ .

**Teorem 2.5.1.** *Ako je  $x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m$ , i  $\mathcal{M} = \overline{\text{sp}}\{x_1, \dots, x_m\}$ , tada je*

$$P_{\mathcal{M}}\mathbf{x} = X\beta, \quad (2.23)$$

gdje je  $X$   $n \times m$  matrica čiji  $j$ -ti stupac je  $\mathbf{x}_j$  i

$$X'X\beta = X'\mathbf{x}. \quad (2.24)$$



Zadnja jednakost ima barem jedno rješenje za  $\beta$ , ali  $X\beta$  je isto za sva rješenja. Postoji točno jedno rješenje u jednakosti 2.24 ako i samo ako je  $X'X$  regularna matrica i u tom slučaju vrijedi

$$P_M \mathbf{x} = X(X'X)^{-1} X' \mathbf{x}. \quad (2.25)$$

Ako je  $\{x_1, \dots, x_m\}$  ortonormalan skup, tada je  $X'X$  jedinična matrica, pa vidimo da je

$$P_M \mathbf{x} = XX' \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle \mathbf{x}_i, \quad (2.26)$$

u skladu s 2.21.

Ako je  $\{x_1, \dots, x_m\}$  linearno nezavisan skup tada mora postojati jedinstveni vektor  $\beta$  takav da vrijedi  $P_M \mathbf{x} = X\beta$ . To znači da 2.24 mora imati jedinstveno rješenje, što u obratu implicira da je  $X'X$  regularna i

$$P_M \mathbf{x} = X(X'X)^{-1} X' \mathbf{x} \text{ za sve } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Matrica  $X(X'X)^{-1} X'$  mora biti jednaka za sve linearno nezavisne skupove  $\{x_1, \dots, x_m\}$  koji razapinju  $M$  budući da je  $P_M$  jedinstveno definirano preslikavanje na  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.6 Konvergencija i najbolji linearni prediktor u $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

Svi rezultati u ovom poglavlju vrijedit će za realne Hilbertove prostore  $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  sa skalarnim produktom  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ . Još ćemo napomenuti da je drugi naziv za konvergenciju u srednjem upravo konvergencija po normi u  $L^2$ , npr. ako je  $X_n, X \in L^2$ , tada je

$$X_n \xrightarrow{L^2} X \text{ ako i samo ako } \|X_n - X\|^2 = E|X_n - X|^2 \rightarrow 0 \text{ kada } n \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

Jednostavnim prepravljanjem već uspostavljenih svojstava konvergencije po normi, dobivamo sljedeću propoziciju.

**Propozicija 2.6.1.** (Svojstva konvergencije u srednjem)

(a)  $X_n$  konvergira u srednjem ako i samo ako  $E|X_m - X_n|^2 \rightarrow 0$  kada  $m, n \rightarrow \infty$

(b) Ako  $X_n \xrightarrow{L^2} X$  i  $Y_n \xrightarrow{L^2} Y$  kada  $n \rightarrow \infty$ ,

(i)  $EX_n = \langle X_n, 1 \rangle \rightarrow \langle X, 1 \rangle = EX$ ,

(ii)  $E|X_n|^2 = \langle X_n, X_n \rangle \rightarrow \langle X, X \rangle = E|X|^2$

$$(iii) E(X_n Y_n) = \langle X_n, Y_n \rangle \rightarrow \langle X, Y \rangle = E(XY).$$

**Definicija 2.6.2.** Ako je  $\mathcal{M}$  zatvoreni podprostor  $L^2$  i  $Y \in L^2$ , tada je najbolji srednje kvadratni prediktor od  $Y$  u  $\mathcal{M}$  element  $\hat{Y} \in \mathcal{M}$  takav da vrijedi

$$\|Y - \hat{Y}\|^2 = \inf_{Z \in \mathcal{M}} \|Y - Z\|^2 = \inf_{Z \in \mathcal{M}} E|Y - Z|^2. \quad (2.28)$$

Teorem o projekciji odmah prepoznaje jedinstveni najbolji prediktor od  $Y$  u  $\mathcal{M}$  kao  $P_{\mathcal{M}}Y$ . Postavljanjem malo jače strukture na zatvoreni potprostor  $\mathcal{M}$ , od definicije 2.27 dolazimo do pojmova uvjetnog očekivanja i najboljeg linearnog prediktora.

**Definicija 2.6.3.** Ako je  $\mathcal{M}$  zatvoreni potprostor od  $L^2$  koji sadrži konstantne funkcije, i ako je  $X \in L^2$ , tada definiramo uvjetno očekivanje od  $X$  uz dano  $\mathcal{M}$  da bude projekcija

$$E_{\mathcal{M}}X = P_{\mathcal{M}}X. \quad (2.29)$$

Koristeći definiciju skalarnog produkta u  $L^2$  i jednadžbu predikcije 2.8, ekvivalentno možemo reći da je  $E_{\mathcal{M}}X$  jedinstveni element od  $\mathcal{M}$  za koji vrijedi

$$E(W E_{\mathcal{M}}X) = E(WX) \text{ za sve } W \in \mathcal{M}. \quad (2.30)$$

Očito operator  $E_{\mathcal{M}}$  na  $L^2$  ima sva svojstva kao i operator projekcije, posebno

$$E_{\mathcal{M}}(aX + bY) = aE_{\mathcal{M}}X + bE_{\mathcal{M}}Y, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.31)$$

$$E_{\mathcal{M}}X_n \xrightarrow{L^2} E_{\mathcal{M}}X \text{ ako } X_n \xrightarrow{L^2} X \quad (2.32)$$

i

$$E_{\mathcal{M}_1}(E_{\mathcal{M}_2}X) = E_{\mathcal{M}_1}X \text{ ako je } \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \quad (2.33)$$

Primjetimo još da je

$$E_{\mathcal{M}}1 = 1 \quad (2.34)$$

i ako je  $\mathcal{M}_0$  zatvoreni podprostor od  $L^2$  koji sadrži sve konstantne funkcije, tada primjena jednadžbe predikcije 2.8 daje

$$E_{\mathcal{M}_0}X = EX. \quad (2.35)$$

**Definicija 2.6.4.** Ako je  $Z$  slučajni vektor na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  i  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , tada je uvjetno očekivanje od  $X$  uz dano  $Z$  definirano kao

$$E(X|Z) = E_{\mathcal{M}(Z)}X, \quad (2.36)$$

gdje je  $\mathcal{M}(Z)$  zatvoreni podprostor od  $L^2$  koji sadrži sve slučajne varijable u  $L^2$  koje se mogu zapisati u obliku  $\phi(Z)$  za neke Borelove funkcije  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Operator  $E_{\mathcal{M}}(Z)$  zadovoljava sva svojstva 2.31 - 2.34, i uz dodatak

$$E_{\mathcal{M}}(Z)X \geq 0 \text{ ako je } X \geq 0. \quad (2.37)$$

Definiciju uvjetnog očekivanja 2.6.4. možemo proširiti nasljedeći način: ako su  $Z_1, \dots, Z_n$  slučajne varijable na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  i  $X \in L^2$ , tada možemo definirati

$$E(X|Z_1, \dots, Z_n) = E_{\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)}(X), \quad (2.38)$$

gdje je  $\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)$  zatvoreni potprostor od  $L^2$  koji sadrži sve slučajne varijable iz  $L^2$  u formi  $\phi(Z_1, \dots, Z_n)$  za neke Borelove funkcije  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sva svojstva od  $E_{\mathcal{M}}(Z)$  popisana gore, prenose se na  $E_{\mathcal{M}}(Z_1, \dots, Z_n)$ .

### Uvjetno očekivanje i najbolji linearni prediktor

Prema teoremu o projekciji, uvjetno očekivanje  $E_{\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)}(X)$  je najbolji srednje kvadratni prediktor od  $X$  u  $\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)$ , tj. ono je najbolja funkcija od  $Z_1, \dots, Z_n$  za predikciju  $X$ . Međutim, određivanje projekcije na  $\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)$  je često je vrlo teško zbog kompleksne prirode jednadžbi 2.30. S druge strane, ako je  $Z_1, \dots, Z_n \in L^2$ , relativno je lagano izračunati projekciju od  $X$  na  $\overline{\text{sp}}\{1, Z_1, \dots, Z_n\} \subseteq \mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)$  s obzirom da možemo pisati

$$P_{\overline{\text{sp}}\{1, Z_1, \dots, Z_n\}}(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i Z_i, \quad Z_0 = 1, \quad (2.39)$$

gdje  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  zadovoljavaju

$$\left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i Z_i, Z_j \right\rangle = \langle X, Z_j \rangle, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.40)$$

ili ekvivalentno,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i E(Z_i Z_j) = E(X Z_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (2.41)$$

Teorem o projekciji garantira da rješenje  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  postoji. Bilo koje rješenje supstituirano u 2.39, daje potrebnu projekciju, poznatu kao najbolji linearni prediktor od  $X$  u terminima  $1, Z_1, \dots, Z_n$ . Kao projekcija od  $X$  na podprostor od  $\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)$ , ono nikad neće imati manju srednje kvadratnu grešku od  $E_{\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)}X$ . Ipak, to je od velike važnosti iz sljedećih razloga:

- (a) jednostavnije ga je izračunati od  $E_{\mathcal{M}}(Z_1, \dots, Z_n)(X)$ ,
- (b) Ovisi samo o prvim i drugim momentima,  $EX, EZ_i, E(Z_i Z_j)$  i  $E(X Z_j)$  iz zajedničke distribucije od  $(X, Z_1, \dots, Z_n)$ ,

(c) Ako  $(X, Z_1, \dots, Z_n)'$  ima višedimenzionalnu normalnu distribuciju, tada je

$$P_{\overline{\text{sp}}\{1, Z_1, \dots, Z_n\}}(X) = E_{\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)}(X).$$

Općenitija definicija najboljeg linearnog prediktora glasi:

**Definicija 2.6.5.** Ako je  $X \in L^2$  i  $Z_\lambda L^2$  za svaki  $\lambda \in \Lambda$ , tada najbolji linearni prediktor od  $X$  u terminima od  $\{Z_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  definiramo kao element iz  $\overline{\text{sp}}\{Z_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  s najmanjom srednje kvadratnom udaljenosti od  $X$ . Prema teoremu o projekciji to je samo  $P_{\overline{\text{sp}}\{Z_\lambda, \lambda \in \Lambda\}}X$ .

Operatori uvjetnog očekivanja  $E_{\mathcal{M}(Z)}$  i  $E_{\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)}$  najčešće su definirani na prostorima slučajnih varijabli  $X$  za koje vrijedi  $E|X| < \infty$ ,  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Restrikcije tih operatora na  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  podudaraju se sa  $E_{\mathcal{M}(Z)}$  i  $E_{\mathcal{M}(Z_1, \dots, Z_n)}$  kao što smo ih definirali.

## Poglavlje 3

# Stacionarni ARMA procesi

U ovom poglavlju predstaviti ćemo jednu od najvažnijih klasa vremenskih nizova  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  definiranih u terminima linearnih diferencijalnih jednačbi s konstantnim koeficijentima. Određivanje ove dodatne strukture definira parametarsku familiju stacionarnih procesa, autoregresivni procesi pomičnih prosjeka ili ARMA procesi. Za bilo koju autokovarijacijsku funkciju  $\gamma(\cdot)$  takvu da je  $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$ , i za bilo koji cijeli broj  $k > 0$ , moguće je pronaći ARMA proces s autokovarijacijskom funkcijom  $\gamma_X(\cdot)$  tako da vrijedi  $\gamma_X(h) = \gamma(h)$ ,  $h = 0, 1, \dots, k$ . Zbog toga familija ARMA procesa igra ključnu ulogu u modeliranju vremenskih nizova. Linearna struktura ARMA procesa vodi jednostavnijoj teoriji linearnih prediktora.

### 3.1 Kauzalni i invertibilni ARMA procesi

U mnogim aspektima najjednostavniji oblik vremenskog niza  $\{X_t\}$  je onaj u kojem su slučajne varijable  $X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  nezavisne i jednako distribuirane s očekivanjem nula i varijancom  $\sigma^2$ . S druge točke gledišta, ignoriramo li sva svojstva zajedničke distribucije od  $\{X_t\}$  osim onih koja možemo zaključiti iz momenata  $E(X_t)$  i  $E(X_s X_t)$ , takve procese identificiramo sa klasom svih stacionarnih procesa koji imaju očekivanje nula i autokovarijacijsku funkciju

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{ako je } h = 0, \\ 0, & \text{ako je } h \neq 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

**Definicija 3.1.1.** Za proces  $\{Z_t\}$  kažemo da je bijeli šum s očekivanjem 0 i varijancom  $\sigma^2$ , u zapisu

$$\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

ako i samo ako  $\{Z_t\}$  ima očekivanje nula i kovarijacijsku funkciju 3.1

Ako su slučajne varijable  $Z_t$  nezavisne i jednako distribuirane s očekivanjem nula i varijancom  $\sigma^2$ , tada ćemo pisati

$$\{Z_t\} \sim \text{IID}(0, \sigma^2) \quad (3.2)$$

Vrlo široka klasa stacionarnih procesa može biti generirana koristeći bijeli šum kao pogon u skupu linearnih diferencijalnih jednačbi. Ovo vodi pojmu autoregresivnog procesa pomičnih prosjeka (ARMA).

**Definicija 3.1.2.** Za proces  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  kažemo da je ARMA( $p, q$ ) proces ako je  $\{X_t\}$  stacionaran i ako za svaki  $t$ ,

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad (3.3)$$

gdje je  $\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ . Kažemo da je  $\{X_t\}$  ARMA( $p, q$ ) proces s očekivanjem  $\mu$  ako je  $\{X_t - \mu\}$  ARMA( $p, q$ ) proces.

Jednačba 3.3 može biti zapisana simbolički u mnogo kompaktnijem obliku

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.4)$$

gdje su  $\phi$  i  $\theta$  polinomi  $p$ -tog i  $q$ -tog stupnja

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \quad (3.5)$$

i

$$\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q \quad (3.6)$$

i  $B$  je operator pomaka unatrag definiran sa

$$B^j X_t = X_{t-j}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.7)$$

Polinomi  $\phi$  i  $\theta$  se odnose na autoregresivne polinome i polinome pomičnih prosjeka respektivno na diferencijalne jednačbe 3.4

### Proces pomičnih posjeka reda $q$ (MA( $q$ ))

Ako je  $\phi(z) \equiv 1$ , tada za

$$X_t = \theta(B)Z_t \quad (3.8)$$

kažemo da je proces pomični prosjek reda  $q$ , tj. MA( $q$ ). Poprilično je jasno da u tom slučaju diferencijabilna jednačba ima jedinstveno rješenje 3.8. Štoviše rješenje  $\{X_t\}$  je stacionaran proces budući da (definirajući  $\theta_0 = 1$  i  $\theta_j = 0$  za  $j > q$ ), vidimo da je

$$EX_t = \sum_{j=0}^q \theta_j EZ_{t-j} = 0$$

i

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & \text{ako je } |h| \leq q, \\ 0, & \text{ako je } |h| > q, \end{cases}$$

### Autoregresivni proces reda $p$ (AR( $p$ ))

Ako je  $\theta(z) \equiv 1$ , tada za

$$\phi(B)X_t = Z_t \quad (3.9)$$

kažemo da je autoregresivni proces reda  $p$ , tj. AR( $p$ ). U tom slučaju egzistencija i jedinstvenost stacionarnog rješenja od 3.9 zahtjeva dodatno ispitivanje. Ilustrirajmo to na slučaju  $\phi(z) = 1 - \phi_1$ , odnosno

$$X_t = Z_t + \phi_1 X_{t-1} \quad (3.10)$$

Iteracijom zadnjeg izraza dobivamo

$$X_t = Z_t + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_1^2 X_{t-2} = \dots = Z_t + \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_1^k Z_{t-k} + \phi_1^{k+1} X_{t-k-1}.$$

Ako je  $|\phi_1| < 1$  i  $\{X_t\}$  je stacionaran, tada je  $\|X_t\|^2 = E(X_t^2)$  konstantno tako da

$$\left\| X_t - \sum_{j=0}^k \phi_1^j Z_{t-j} \right\|^2 = \phi_1^{2k+2} \|X_{t-k-1}\|^2 \rightarrow 0 \text{ kada } k \rightarrow \infty$$

Budući da  $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j}$  konvergira u srednjem (prema Cauchyjevom kriteriju), zaključujemo da je

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j} \quad (3.11)$$

Jednadžba 3.11 vrijedi ne samo u smislu konvergencije u srednjem, već i (prema poziciji 3.1.4. niže) s vjerojatnošću 1, tj.

$$X_t(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j}(\omega) \text{ za svaki } \omega \notin E,$$

gdje je  $E$  podskup temeljnog vjerojatnosnog prostora s očekivanjem nula. Svi konvergentni nizovi slučajnih varijabli iz ovog poglavlja bit će konvergentni u srednjem (tj. u  $L^2$ ) i apsolutno konvergentni s očekivanjem 1. Sada je  $\{X_t\}$  definiran sa 3.11 stacionaran budući da

$$EX_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j EZ_{t-j} = 0$$

i

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \sum_{j=0}^n \phi_1^j Z_{t+h-j} \right) \left( \sum_{k=0}^n \phi_1^k Z_{t-k} \right) \right] = \sigma^2 \phi_1^{|h|} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} = \sigma^2 \phi_1^{|h|} / (1 - \phi_1^2).$$

Štoviše,  $\{X_t\}$  definiran sa 3.11 zadovoljava diferencijalnu jednadžbu 3.10 stoga je i jedinstveno stacionarno rješenje.

U slučaju kada je  $|\phi_1| > 1$  nizovi 3.11 ne konvergiraju u  $L^2$ . Međutim 3.10 možemo zapisati u drugačijem obliku

$$X_t = -\phi_1^{-1} Z_{t+1} + \phi_1^{-1} X_{t+1} \quad (3.12)$$

Iteriranje 3.12 daje

$$\begin{aligned} X_t &= -\phi_1^{-1} Z_{t+1} - \phi_1^{-2} Z_{t+2} + \phi_1^{-2} X_{t+2} \\ &= \dots \\ &= -\phi_1^{-1} Z_{t+1} - \dots - \phi_1^{-k-1} Z_{t+k+1} + \phi_1^{-k-1} X_{t+k+1} \end{aligned}$$

što pokazuje, s istom argumentacijom kao u prethodnom odlomku, da je

$$X_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{-j} Z_{t+j} \quad (3.13)$$

jedinstveno stacionarno rješenje od 3.10. Ovo rješenje ne smijemo zamijeniti s nestacionarnim rješenjem  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  od 3.10 dobiveno kada je  $X_0$  bilo koja slučajna varijabla koja nije korelirana s  $\{Z_t\}$ .

Stacionarno rješenje 3.13 se često smatra neprirodnim budući da je  $X_t$  definiran sa 3.13 koreliran sa  $\{Z_s, s > t\}$ , svojstvo koje ne zadovoljava rješenje 3.11 kada je  $|\phi_1| < 1$ . Stoga je uobičajeno prilikom modeliranja stacionarnih vremenskih nizova napraviti restrikciju na AR(1) proces s  $|\phi_1| < 1$  za koji  $X_t$  ima reprezentaciju 3.11 u terminima  $\{Z_s, s \leq t\}$ . Takve procese zovemo kauzalnim ili vremenski neovisni autoregresivni procesi. Treba napomenuti da svaki AR(1) proces s  $|\phi_1| > 1$  može biti izražen kao AR(1) proces s  $|\phi_1| < 1$  i novim bijelim šumom. Iz drugog kuta gledanja, ništa nije izgubljeno eliminacijom AR(1) procesa sa  $|\phi_1| > 1$  iz razmatranja.

Ako je  $|\phi_1| = 1$ , tada ne postoji stacionarno rješenje od 3.10. Posljedično, ne postoji AR(1) proces s  $|\phi_1| = 1$  prema našoj definiciji 3.1.2.

## Kauzalnost i invertibilnost

Koncept kauzalnosti sada definiramo za generalizirane ARMA( $p, q$ ) procese.



**Definicija 3.1.3.** Za ARMA( $p, q$ ) proces definiran jednađbom  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$  kažemo da je kauzalan (ili još točnije da je kauzalna funkcija od  $\{Z_t\}$ ) ako postoji konstantan niz  $\{\psi_j\}$  takav da  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  i

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \dots \quad (3.14)$$

Napomenuti ćemo da je kauzalnost svojstvo ne samo procesa  $\{X_t\}$  već i veze između dva procesa  $\{X_t\}$  i  $\{Z_t\}$  koji se pojavljuju u definiranju ARMA jednađbe. Reći ćemo da je  $\{X_t\}$  kauzalan ako je dobiven iz  $\{Z_t\}$  primjenom kauzalnog linearnog filtera.

Sljedeći teorem daje nam nužne i dovoljne uvjete da ARMA proces bude kauzalan. Također daje eksplicitnu reprezentaciju od  $X_t$  u terminima  $\{Z_s, s \leq t\}$ .

**Teorem 3.1.4.** Neka je  $\{X_t\}$  ARMA( $p, q$ ) proces za koji polinomi  $\phi(\cdot)$  i  $\theta(\cdot)$  nemaju zajedničke nultočke. Tada je  $\{X_t\}$  kauzalan ako i samo ako  $\phi(z) \neq 0$  za sve  $z \in \mathbb{C}$  takva da je  $|z| \leq 1$ . Koeficijenti  $\{\psi_j\}$  u 3.14 definirani su relacijom

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z), \quad |z| \leq 1 \quad (3.15)$$

Ako je  $\{X_t\}$  ARMA( $p, q$ ) proces za koji polinomi  $\phi(\cdot)$  i  $\theta(\cdot)$  imaju zajedničke nultočke, tada imamo dvije mogućnosti:

- (a) ni jedna od zajedničkih nultočaka ne leži na jediničnoj kružnici, u tom slučaju je  $\{X_t\}$  jedinstveno stacionarno rješenje ARMA jednađbi koje nemaju zajedničkih nultočaka, dobivenh uklanjanjem zajedničkih faktora od  $\phi(\cdot)$  i  $\theta(\cdot)$ .
- (b) barem jedna od zajedničkih nultočaka leži na jediničnoj kružnici, u tom slučaju ARMA jednađbe imaju više od jednog stacionarnog rješenja.

Posljedično se ARMA procesi za koje  $\phi(\cdot)$  i  $\theta(\cdot)$  imaju zajedničke nultočke rijetko uzimaju u obzir.

Prvi dio teorema 3.1.6. pokazuje da ako je  $\{X_t\}$  stacionarno rješenje ARMA jednađbi s  $\phi(z) \neq 0$  za  $|z| \leq 1$ , tada imamo  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$  gdje je  $\{\psi_j\}$  definiran s 3.15. Obratno, ako je  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ , tada je  $\phi(B)X_t = \phi(B)\psi(B)Z_t = \theta(B)Z_t$ . Prema tome, proces  $\{\psi(B)Z_t\}$  je jedinstveno stacionarno rješenje ARMA jednađbi ako je  $\phi(z) \neq 0$  za  $|z| \leq 1$ .

Ako  $\phi(\cdot)$  i  $\theta(\cdot)$  nemaju zajedničkih nultočaka i ako  $\phi(z) = 0$  za neke  $z \in \mathbb{C}$  s  $|z| = 1$ , tada ne postoji stacionarno rješenje od  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ .

Sada ćemo predstaviti drugi koncept koji je usko povezan s kauzalnošću.

**Definicija 3.1.5.** Za ARMA( $p, q$ ) proces definiran jednažbom  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$  kažemo da je invertibilan ako postoji niz konstanti  $\{\pi_j\}$  takvih da je  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  i

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \dots \quad (3.16)$$

Poput kauzalnosti, svojstvo invertibilnosti nije svojstvo samo procesa  $\{X_t\}$ , već veze između procesa  $\{X_t\}$  i  $\{Z_t\}$  koji se pojavljuju u definiciji ARMA jednažbi. Sljedeći teorem daje dovoljne i nužne uvjete za invertibilnost procesa i definira koeficijente  $\pi_j$  iz zapisa 3.16.

**Teorem 3.1.6.** Neka je  $\{X_t\}$  ARMA( $p, q$ ) proces za koji polinomi  $\phi(\cdot)$  i  $\theta(\cdot)$  nemaju zajedničke nultočke. Tada je  $\{X_t\}$  invertibilan ako i samo ako  $\pi(z) \neq 0$  za sve  $z \in \mathbb{C}$  takva da je  $|z| \leq 1$ . Koeficijenti  $\{\pi_j\}$  u 3.16 definirani su relacijom

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \phi(z)/\theta(z), \quad |z| \leq 1 \quad (3.17)$$

Ako je  $\{X_t\}$  stacionarno rješenje jednažbi

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2), \quad (3.18)$$

i ako je  $\phi(z)\theta(z) \neq 0$  za  $|z| \leq 1$ , tada

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

i

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$$

gdje je  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z)$  i  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \phi(z)/\theta(z)$ ,  $|z| \leq 1$ .

Ako je  $\{X_t\}$  bilo koji ARMA proces,  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ , s  $\phi(z)$  ne-nul polinomom za svaki  $z$  takav da je  $|z| = 1$ , tada je moguće pronaći polinome  $\tilde{\phi}(\cdot)$ ,  $\tilde{\theta}(\cdot)$  i bijeli šum  $\{Z_t^*\}$  takav da je  $\tilde{\phi}(B)X_t = \tilde{\theta}(B)Z_t^*$  i  $\{X_t\}$  kauzalna funkcija od  $\{Z_t^*\}$ . Uz uvjet da je  $\theta(z)$  ne-nul polinom kada je  $|z| = 1$ ,  $\tilde{\theta}(\cdot)$  možemo izabrati na način da je  $\{X_t\}$  također invertibilna funkcija od  $\{Z_t^*\}$ , tj. na način da je  $\tilde{\theta}(z)$  ne-nul polinom za  $|z| \leq 1$ . Ako je  $\{Z_t\} \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ , generalno  $\{Z_t^*\}$  ne mora biti nezavisan, no ako je  $\{Z_t\}$  Gaussovski, tada jest nezavisan.

U nastavku ćemo se fokusirati na kauzalne invertibilne ARMA procese osim ako drugačije ne napomenemo.

## 3.2 Računanje autokovarijacijske funkcije ARMA( $p, q$ ) procesa

U ovom ćemo dijelu dati tri metode računanja autokovarijacijske funkcije ARMA procesa. U praksi je treća metoda najpogodnija za dobivanje brojčanih vrijednosti, dok je druga najpogodnija za dobivanje rješenja u zatvorenom obliku.

**Metoda 1:** autokovarijacijska funkcija  $\gamma$  kauzalnog ARMA( $p, q$ ) procesa  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$  zadovoljava

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|} \quad (3.19)$$

gdje je

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z), \text{ za } |z| \leq 1, \quad (3.20)$$

$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$  i  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ . Kako bi odredili koeficijente  $\psi_j$  možemo ponovo zapisati 3.20 u obliku  $\psi(z)\phi(z) = \theta(z)$  i izjednačiti koeficijente uz  $z^j$  da dobijemo (definirajući  $\theta_0 = 1, \theta_j = 0$  za  $j > q$  i  $\phi_j = 0$  za  $j > p$ ),

$$\psi_j - \sum_{0 < k \leq j} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad 0 \leq j < \max_{p, q+1} \quad (3.21)$$

i

$$\psi_j - \sum_{0 < k \leq p} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad j \geq \max_{p, q+1}. \quad (3.22)$$

Ove jednadžbe lako se mogu riješiti za  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ . Stoga

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \theta_0 = 1, \\ \psi_1 &= \theta_1 + \psi_0 \phi_1 = \theta_1 + \phi_1, \\ \psi_2 &= \theta_2 + \psi_0 \phi_2 + \psi_1 \phi_1 = \theta_2 + \phi_2 + \theta_1 \phi_1 + \phi_1^2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Alternativno, generalizirano rješenje 3.22 možemo zapisati kao

$$\psi_n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_{ij} n^j \xi_i^{-n}, \quad n \geq \max(p, q+1) - p, \quad (3.24)$$

gdje su  $\xi_i, i = 1, \dots, k$  različite nultočke od  $\phi(z)$  i  $r_i$  je kratnost od  $\xi_i$  (stoga moramo imati  $\sum_{i=1}^k r_i = p$ ).  $p$  konstanta  $\alpha_{ij}$  i koeficijenti  $\psi_j, 0 \leq j < \max(p, q+1) - p$ , su tada

jedinstveno određene s graničnim uvjetima iz 3.21. Time su definirani niz  $\{\psi_j\}$  i autokovarijacijska funkcija  $\gamma$ .

**Metoda 2:** Alternativna metoda za računanje autokovarijacijske funkcije  $\gamma(\cdot)$  kauzalnog ARMA( $p, q$ ) procesa

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad (3.25)$$

bazirana je na diferencijskim jednadžbama za  $\gamma(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dobivenih množenjem obje strane jednakosti 3.25 s  $X_{t-k}$  i uzimanjem očekivanja, naime

$$\gamma(k) - \phi_1\gamma(k-1) - \dots - \phi_p\gamma(k-p) = \sigma^2 \sum_{k \leq j \leq q} \theta_j \psi_{j-k}, \quad 0 \leq k < \max(p, q+1), \quad (3.26)$$

i

$$\gamma(k) - \phi_1\gamma(k-1) - \dots - \phi_p\gamma(k-p) = 0, \quad k \geq \max(p, q+1). \quad (3.27)$$

U evaluaciji desne strane jednakosti jednadžbi koristili smo reprezentaciju  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ .

Generalizacija rješenja od 3.27 ima isti oblik kao 3.24

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{r_i-1} \beta_{ij} h^j \xi_i^{-h}, \quad h \geq \max(p, q+1) - p, \quad (3.28)$$

gdje su  $p$  konstanti  $\beta_{ij}$  i kovarijance  $\gamma(j)$ ,  $0 \leq j < \max(p, q+1) - p$  jedinstveno određene iz graničnih uvjeta 3.26 nakon što smo izračunali  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_q$  iz 3.23.

**Metoda3:** Numeričko određivanje autokovarijacijske funkcije  $\gamma(\cdot)$  iz jednadžbi 3.26 i 3.27 može se odmah izvesti tako da prvo pronađemo  $\gamma(0), \dots, \gamma(p)$  iz jednadžbi s  $k = 0, 1, \dots, p$ , i tada rekurzivno da bi odredili  $\gamma(p+1), \gamma(p+2), \dots$ .

### 3.3 Parcijalna autokorelacijska funkcija

Parcijalna autokorelacijska funkcija, poput autokorelacijske funkcije, daje vitalne informacije koje se odnose na zavisnost stacionarnog procesa. Poput autokorelacijske funkcije također ovisi samo o drugom redu svojstava procesa. Parcijalna autokorelacijska funkcija  $\alpha(k)$  u pomaku  $k$  može se smatrati korelacijom između  $X_1, \dots, X_k$ .

**Definicija 3.3.1.** Parcijalnu autokorelacijsku funkciju (pacf)  $\alpha(\cdot)$  stacionarnog vremenskog niza definiramo sa

$$\alpha(1) = \text{Corr}(X_2, X_1) = \rho(1),$$

i

$$\alpha(k) = \text{Corr}(X_{k+1} - P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_2, \dots, X_k\}} X_{k+1}, X_1 - P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_2, \dots, X_k\}} X_1), \quad k \geq 2,$$

gdje su  $P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_2, \dots, X_k\}} X_{k+1}$  i  $P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_2, \dots, X_k\}} X_1$  projekcije. Vrijednost  $\alpha(k)$  poznata je kao parcijalna autokorelacija u pomaku  $k$ .

Parcijalna autokorelacija  $\alpha(k)$ ,  $k \geq 2$ , je dakle korelacija dva reziduala dobivena nakon regresije  $X_{k+1}$  i  $X_1$  na sredini opažanja  $X_2, \dots, X_k$ . Prisjetimo se da ako stacionaran proces ima očekivanje 0, tada  $P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_2, \dots, X_k\}}(\cdot) = P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_k\}}(\cdot)$ .

### Ekvivalentna definicija parcijalne autokorelacijske funkcije

Neka je  $\{X_t\}$  stacionaran proces s očekivanjem 0 i autokovarijacijskom funkcijom  $\gamma(\cdot)$  takvom da  $\gamma(h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow \infty$ , i pretpostavimo da su  $\phi_{kj}$ ,  $j = 1, \dots, k$ ;  $k = 1, 2, \dots$ , koeficijenti u reprezentaciji

$$P_{\overline{\text{sp}}\{X_1, \dots, X_k\}} X_{k+1} = \sum_{j=1}^k \phi_{kj} X_{k+1-j}.$$

Tada iz jednadžbi

$$\langle X_{k+1} - P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_k\}} X_{k+1}, X_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

Dobivamo

$$\begin{bmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) & \dots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \rho(k-3) & \dots & \rho(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1. \quad (3.29)$$

**Definicija 3.3.2.** *Parcijalna autokorelacijska funkcija  $\alpha(k)$  od  $\{X_t\}$  u pomaku  $k$  je*

$$\alpha(k) = \phi_{kk}, \quad k \geq 1,$$

gdje je  $\phi_{kk}$  jedinstveno određen sa 3.29.

**Definicija 3.3.3.** *Uzoračka parcijalna autokorelacijska funkcija  $\hat{\alpha}(k)$  u pomaku  $k$  od  $\{x_1, \dots, x_n\}$  definirana je, uz uvjet da je  $x_i \neq x_j$  za neke  $i$  i  $j$ , sa*

$$\hat{\alpha}(k) = \hat{\phi}_{kk}, \quad 1 \leq k < n,$$

gdje je  $\hat{\phi}_{kk}$  jedinstveno određen sa 3.29 gdje je svaki  $\rho(j)$  zamjenjen sa odgovarajućom uzoračkom autokorelacijom  $\hat{\rho}(j)$ .

### 3.4 Autokovarijacijska funkcija izvodnica

Ako je  $\{X_t\}$  stacionaran proces s autokovarijacijskom funkcijom  $\gamma(\cdot)$ , tada generirajuća autokovarijacijska funkcija definirana sa

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)z^k, \quad (3.30)$$

uz uvjet da red konvergira za svaki  $z$  iz za koji vrijedi  $r^{-1} < |z| < r$  uz  $r > 1$ . Često je generirajuću funkciju lako izračunati, u kojem slučaju se autokovarijacija u pomaku  $k$  može odrediti utvrđivanjem koeficijenata bilo  $z^k$  ili  $z^{-k}$ . Očito je da je  $\{X_t\}$  bijeli šum ako i samo ako je generirajuća autokovarijacijska funkcija  $G(z)$  konstantna za svaki  $z$ . Ako

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2) \quad (3.31)$$

i postoji  $r > 1$  takav da

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j|z^j < \infty, \quad r^{-1} < |z| < r, \quad (3.32)$$

funkcija izvodnica  $G(\cdot)$  ima vrlo jednostavan oblik. Lako se može vidjeti da

$$\gamma(k) = \text{Cov}(X_{t+k}, X_t) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|}$$

stoga

$$\begin{aligned} G(z) &= \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|} z^k \\ &= \sigma^2 \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} (z^k + z^{-k}) \right] \\ &= \sigma^2 \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \right) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k z^k \right). \end{aligned}$$

Definirajući

$$\psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j, \quad r^{-1} < |z| < r,$$

rezultat možemo ljepše zapisati u obliku

$$G(z) = \sigma^2 \psi(z) \psi(z^{-1}), \quad r^{-1} < |z| < r. \quad (3.33)$$

**Propozicija 3.4.1.** *Neka je  $\{X_t\}$  ARMA( $p, q$ ) proces koji zadovoljava jednađžbe*

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$

*gdje je  $\phi(z) \neq 0$  i  $\theta(z) \neq 0$  za svaki  $z \in \mathbb{C}$  takav da je  $|z| = 1$ . Tada postoje ne-nul polinomi,  $\tilde{\phi}(z)$  i  $\tilde{\theta}(z)$ , za  $|z| \leq 1$ , stupnja  $p$  i  $q$  respektivno, i bijeli šum  $\{Z_t^*\}$  takav da  $\{X_t\}$  zadovoljava kauzalne inverbitilne jednađžbe*

$$\tilde{\phi}(B)X_t = \tilde{\theta}(B)Z_t^*.$$

## Poglavlje 4

# Predikcija stacionarnih procesa

Ovdje ćemo proučiti problem predikcije vrijednosti  $\{X_t, t \geq n+1\}$  stacionarnog procesa u terminima od  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Ideja je iskoristiti opažanja uzeta u trenutku ili prije trenutka  $n$  da bi predvidjeli daljnje ponašanje od  $\{X_t\}$ . Za bilo koji dani zatvoreni podprostor  $\mathcal{M}$  od  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , najbolji prediktor u  $\mathcal{M}$  od  $X_{n+h}$  je definiran kao element od  $\mathcal{M}$  s minimalnom kvadratnom udaljenšću od  $X_{n+h}$ . Naravno to nije jedina moguća definicija 'najboljeg', ali za procese sa konačnim drugim momentom vodi teoriji predikcije koja je jednostavna, elegantna i korisna u praksi. Ranije smo pokazali da projekcije  $P_{\mathcal{M}\{X_1, \dots, X_n\}} X_{n+h}$  i  $P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_1, \dots, X_n\}} X_{n+h}$  su respektivno najbolje funkcije od  $X_1, \dots, X_n$  i najbolja linearna kombinacija od  $1, X_1, \dots, X_n$  za predikciju  $X_{n+h}$ . Zbog toga ćemo se koncentrirati na potonje prediktore (najbolje linearne prediktore) umjesto rada sa uvjetnim očekivanjem.

### 4.1 Jednadžbe prediktora u vremenskoj domeni

Neka je  $\{X_t\}$  stacionaran proces s očekivanjem  $\mu$  i autokovarijacijskom funkcijom  $\gamma(\cdot)$ . Tada je proces  $\{Y_t\} = \{X_t - \mu\}$  stacionaran proces s očekivanjem 0 i autokovarijacijskom funkcijom  $\gamma(\cdot)$  i vrijedi

$$P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_1, \dots, X_n\}} X_{n+h} = \mu + P_{\overline{\text{sp}}\{Y_1, \dots, Y_n\}} Y_{n+h}. \quad (4.1)$$

Bez smanjena općenitosti, kroz poglavlje ćemo pretpostaviti da je  $\mu = 0$ . Pod tom pretpostavkom jasno je da je 4.1

$$P_{\overline{\text{sp}}\{1, X_1, \dots, X_n\}} X_{n+h} = P_{\overline{\text{sp}}\{X_1, \dots, X_n\}} X_{n+h}. \quad (4.2)$$

#### Jednadžbe za one-step prediktore

Neka  $\mathcal{H}_n$  predstavlja zatvoreni linearni potprostor  $\overline{\text{sp}}\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $n \geq 1$ , i neka  $\hat{X}_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ , predstavlja one-step prediktor, definiran sa



$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n = 0, \\ P_{\mathcal{H}_n} X_{n+1}, & \text{ako je } n \geq 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

Budući da je  $\hat{X}_{n+1} \in \mathcal{H}_n, n \geq 1$ , možemo pisati

$$\hat{X}_{n+1} = \phi_{n1}X_n + \cdots + \phi_{nn}X_1, \quad n \geq 1. \quad (4.4)$$

gdje  $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$  zadovoljava prediktorsku jednadžbu 2.8, tj.

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \phi_{ni}X_{n+1-i}, X_{n+1-j} \right\rangle = \langle X_{n+1}, X_{n+1-j} \rangle, \quad j = 1, \dots, n,$$

uz  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ . Zbog linearnosti skalarnog produkta ove jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$\sum_{i=1}^n \phi_{ni}\gamma(i-j) = \gamma(j), \quad j = 1, \dots, n,$$

ili ekvivalentno

$$\Gamma_n \phi_n = \gamma_n, \quad (4.5)$$

gdje je  $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1,\dots,n}$ ,  $\gamma_n = (\gamma(1), \dots, \gamma(n))'$  i  $\phi_n = (\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn})'$ . Teorem o projekciji 2.3.4. garantira da jednadžba 4.5 ima barem jedno rješenje budući da se  $\hat{X}_{n+1}$  mora moći izraziti u obliku 4.4 za neke  $\phi_n \in \mathbb{R}^n$ . Jednadžbe 4.4 i 4.5 su poznate kao one-step prediktorske jednadžbe. Iako može postojati više rješenja od 4.5, svaki od njih, kada se supstituira u 4.4, mora dati jednaki prediktor  $\hat{X}_{n+1}$  budući da znamo da je  $\hat{X}_{n+1}$  jedinstveno definiran. Postoji točno jedno rješenje od 4.5 ako i samo ako je  $\Gamma_n$  regularna, i u tom slučaju rješenje je

$$\phi_n = \Gamma_n^{-1} \gamma_n, \quad (4.6)$$

Uvjeti iz sljedeće propozicije dovoljni su da bi osigurali regularnost od  $\Gamma_n$  za svaki  $n$ .

**Propozicija 4.1.1.** *Ako je  $\gamma(0) > 0$  i  $\gamma(h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow \infty$ , tada je kovarijacijska matrica  $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1,\dots,n}$  od  $(X_1, \dots, X_n)'$  regularna za svaki  $n$ .*

**Korolar 4.1.2.** *Uz uvjete iz prethodne propozicije, najbolji linearni prediktor  $\hat{X}_{n+1}$  od  $X_{n+1}$  u terminima od  $X_1, \dots, X_n$  je*

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \phi_{ni}X_{n+1-i}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gdje je  $\phi_n := (\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn})' = \Gamma_n^{-1} \gamma_n$ ,  $\gamma_n = (\gamma(1), \dots, \gamma(n))'$  i  $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1,\dots,n}$ . Srednje kvadratna greška je  $v_n = \gamma(0) - \gamma_n' \Gamma_n^{-1} \gamma_n$ .

### Jednadžbe za $h$ -step prediktore, $h \geq 1$

Najbolji linearni prediktor od  $X_{n+h}$  u terminima od  $X_1, \dots, X_n$  za bilo koji  $h \geq 1$  možemo pronaći na isti način kao i  $\hat{X}_{n+1}$ . Dakle,

$$P_{\mathcal{H}_n} X_{n+h} = \phi_{n1}^{(h)} X_n + \dots + \phi_{nn}^{(h)} X_1, \quad n, h \geq 1, \quad (4.7)$$

gdje je  $\phi_n^{(h)} = (\phi_{n1}^{(h)}, \dots, \phi_{nn}^{(h)})'$  bilo koje rješenje (jedinstveno ako je  $\Gamma_n$  regularna) od

$$\Gamma_n \phi_n^{(h)} = \gamma_n^{(h)}, \quad (4.8)$$

gdje je  $\gamma_n^{(h)} = (\gamma_h, \gamma_{h+1}, \dots, \gamma_{n+h-1})'$ .

## 4.2 Rekurzivna metoda za računanje najboljih linearnih prediktora

U ovom dijelu ćemo dati dva rekurzivna algoritma za određivanje one-step prediktora  $\hat{X}_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , definiranog sa 4.3 i pokazati ćemo kako ih iskoristiti za računanje  $h$ -step prediktora  $P_{\mathcal{H}_n} X_{n+h}$ ,  $h \geq 1$ . Rekurzivna predikcija je od velike važnosti u praksi budući da direktno računanje  $P_{\mathcal{H}_n} X_{n+h}$  iz 4.7 i 4.8 za velike  $n$  zahtjeva rješenje velikog sustava linearnih jednadžbi. Štoviše, svaki put kada se broj opažanja poveća, cijeli proces se mora ponoviti. Algoritmi koje ćemo opisati u ovom dijelu dozvoljavaju nam računanje najboljeg linearnog prediktora bez ikakvih računanja inverznih matrica. Nadalje, oni koriste prediktore temeljene na  $n$  opažanja da bi izračunali one temeljene na  $n+1$  opažanja,  $n = 1, 2, \dots$ .

### Rekurzivna predikcija korištenjem Dubin - Levinsonovog algoritma

Budući da je  $\hat{X}_{n+1} = P_{\mathcal{H}_n} X_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , možemo  $\hat{X}_{n+1}$  izraziti u obliku

$$\hat{X}_{n+1} = \phi_{n1} X_n + \dots + \phi_{nn} X_1, \quad n \geq 1. \quad (4.9)$$

Srednje kvadratnu grešku prediktora označavati ćemo sa  $v_n$ . Dakle,

$$v_n = E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2, \quad n \geq 1, \quad (4.10)$$

i očito je  $v_0 = \gamma(0)$ .

Algoritam određen u idućoj propoziciji, poznat kao Dubin - Levinsonov algoritam, je rekurzivna shema za računanje  $\phi_n := (\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn})'$  i  $v_n$  za  $n = 1, 2, \dots$ .

**Propozicija 4.2.1.** (Dubin - Levinsonov algoritam) *Ako je  $\{X_t\}$  stacionarni proces s očekivanjem 0 i autokovarijacijskom funkcijom  $\gamma(\cdot)$  takvom da je  $\gamma(0) > 0$  i  $\gamma(h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow \infty$*

$\infty$ , tada koeficijenti  $\phi_{ni}$  i srednje kvadratne greške  $v_n$  definirani sa 4.9 i 4.10 zadovoljavaju  $\phi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$ ,  $v_0 = \gamma(0)$ ,

$$\phi_{nn} = \left[ \gamma(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{n-1,i} \gamma(n-i) \right] v_{n-1}^{-1}, \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{n1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{nn} \begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

i

$$v_n = v_{n-1} [1 - \phi_{nn}^2]. \quad (4.13)$$

U poglavlju 3.4 dali smo dvije definicije parcijalne autokorelacijske funkcije od  $\{X_t\}$  u pomaku  $h$ , tj.

$$\alpha(n) = \text{Corr}(X_{n+1} - P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_n\}} X_{n+1}, X_1 - P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_n\}} X_1)$$

i

$$\alpha(n) = \phi_{nn}.$$

U idućem korolaru dati ćemo ekvivalenciju ove dvije definicije uz uvjete iz propozicije 4.2.1.

**Korolar 4.2.2.** (Parcijalna autokorelacijska funkcija) *Uz pretpostavke iz propozicije 4.2.1. vrijedi*

$$\phi_{nn} = \text{Corr}(X_{n+1} - P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_n\}} X_{n+1}, X_1 - P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_n\}} X_1).$$

## Rekurzivna predikcija korištenjem inovacijskog algoritma

Druga rekurzija, dana u donjoj propoziciji 4.2.3., ovisi o dekompoziciji od  $\mathcal{H}_n$  na  $n$  ortogonalnih potprostora pomoću Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije. Propozicija 4.2.3. je generalno više primjenjiva od propozicije 4.2.1. budući da dopuštamo mogućnost da  $\{X_t\}$  bude nestacionaran proces s očekivanjem 0 i autokovarijacijskom funkcijom,

$$\kappa(i, j) = \langle X_i, X_j \rangle = E(X_i X_j).$$

Kao i prije, definiramo  $\mathcal{H}_n = \overline{\text{sp}}\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $\hat{X}_{n+1}$  kao u 4.3 i  $v_n = \|X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}\|^2$ . Očito je (definirajući  $\hat{X}_1 := 0$ ),

$$\mathcal{H}_n = \overline{\text{sp}}\{X_1 - \hat{X}_1, X_2 - \hat{X}_2, \dots, X_n - \hat{X}_n\}, \quad n \geq 1,$$

tako da

$$\hat{X}_{n-1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}).$$

Sad ćemo dati rekursivnu shemu za računanje  $\{\theta_{nj}, j = 1, \dots, n; v_n\}, n = 1, 2, \dots$

**Propozicija 4.2.3.** (inovacijski algoritam) *Ako  $\{X_t\}$  ima očekivanje 0 i  $E(X_i X_j) = \kappa(i, j)$ , gdje je matrica  $[\kappa(i, j)]_{i,j=1}^n$  regularna za svaki  $n = 1, 2, \dots$ , tada one-step prediktori  $\hat{X}_{n+1}, n \geq 0$ , i njihove srednje kvadratne greške  $v_n, n \geq 1$ , su dane sa*

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n = 0, \\ \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}), & \text{ako je } n \geq 1, \end{cases} \quad (4.14)$$

i

$$\begin{cases} v_0 = \kappa(1, 1) \\ \theta_{n,n-k} = v_k^{-1} \left( \kappa(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \right), & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ v_n = \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j. \end{cases} \quad (4.15)$$

Dok Durbin - Levinson algoritam daje koeficijente od  $X_1, \dots, X_n$  u reprezentaciji  $\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} X_{n+1-j}$ , inovacijski algoritam daje koeficijente „inovacije“,  $(X_j - \hat{X}_j), j = 1, \dots, n$ , u ortogonalnom proširenju  $\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j})$ . Potonje proširenje je izuzetno jednostavno za uporabu i, u slučaju ARMA( $p, q$ ) procesa, može biti još više pojednostavljeno. Propozicija 4.2.3. također daje inovacijsku reprezentaciju od  $X_{n+1}$ . Dakle, definirajući  $\theta_{n0} = 1$ , možemo pisati

$$X_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### Rekursivni izračun $h$ -step prediktora, $h \geq 1$

Uvest ćemo oznaku  $P_n$  za operator projekcije  $P_{\mathcal{H}_n}$ . Tada  $h$ -step prediktor  $P_n X_{n+h}$  lako možemo pronaći uz pomoć Propozicije 4.2.3. Uz Propoziciju 2.3.6. za  $h \geq 1$ , vrijedi

$$P_n X_{n+h} = P_n P_{n+h-1} X_{n+h} = P_n \hat{X}_{n+h} = P_n \sum_{j=1}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}).$$

Budući da je  $(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}) \perp \mathcal{H}_n$  za  $j < h$ , iz Propozicije 2.3.6. slijedi

$$P_n X_{n+h} = \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}) \quad (4.16)$$

gdje su koeficijenti  $\theta_{nj}$  određeni kao ranije s 4.15. Štoviše, srednje kvadratnu grešku možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} E(X_{n+h} - P_n X_{n+h})^2 &= \|X_{n+h}\|^2 - \|P_n X_{n+h}\|^2 \\ &= \kappa(n+h, n+h) - \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}^2 v_{n+h-j-j}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

### 4.3 Rekurzivni prediktor ARMA( $p, q$ ) procesa

Propoziciju 4.2.3. možemo direktno primjeniti na prediktora kauzalnog ARMA procesa

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \Sigma^2) \quad (4.18)$$

gdje je kao i obično,  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  i  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ . Međutim, vidjet ćemo da drastično pojednostavljenje u kalkulaciji može biti napravljeno ako, umjesto primjene Propozicije 4.2.3. direktno na  $\{X_t\}$ , primijenimo je na transformirani proces

$$\begin{cases} W_t = \sigma^{-1} X_t, & t = 1, \dots, m, \\ W_t = \sigma^{-1} \phi(B) X_t, & t > m \end{cases} \quad (4.19)$$

gdje je

$$m = \max(p, q) \quad (4.20)$$

Zbog jednostavnosti definirat ćemo  $\theta_0 = 1$  i pretpostaviti da je  $p \geq 1$  i  $q \geq 1$ . Ne dolazi do smanjenja općenitosti s ovim pretpostavkama budući da u ovoj analizi dopuštamo da bilo koji od koeficijenata  $\phi_i$  i  $\theta_i$  bude jednak 0.

S potprostorom  $\mathcal{H}_n$  definiranim u dijelu 5.1, možemo pisati

$$\mathcal{H}_n = \overline{\text{sp}}\{X_1, \dots, X_n\} = \overline{\text{sp}}\{W_1, \dots, W_n\}, \quad n \geq 1. \quad (4.21)$$

Za  $n \geq 1$ ,  $\hat{X}_{n+1}$  i  $\hat{W}_{n+1}$  će označavati projekcije na  $\mathcal{H}_n$  od  $X_{n+1}$  i  $W_{n+1}$  respektivno. Kao u 4.3 možemo definirati  $\hat{X}_1 = \hat{W}_1 = 0$ . Autokovarijacijsku funkciju  $\gamma_X(\cdot)$  od  $\{X_t\}$  možemo lako izračunati koristeći bilo koju od metoda opisanih u 3.3. Autokovarijacije  $\kappa(i, j) = E(W_i W_j)$  se mogu naći iz

$$\kappa(i, j) = \begin{cases} \sigma^{-2} \gamma_X(i-j), & 1 \leq i, j \leq m, \\ \sigma^{-2} \left[ \gamma_X(i-j) - \sum_{r=1}^p \phi_r \gamma_X(r - |i-j|) \right], & \min(i, j) \leq m < \max(i, j) \leq 2m, \\ \sum_{r=1}^q \theta_r \theta_{r+|i-j|}, & \min(i, j) > m, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (4.22)$$

gdje prihvaćamo konvenciju  $\theta_j = 0$  za  $j > q$ .

Primjenom Propozicije 4.2.3. na proces  $\{W_t\}$  dobivamo

$$\begin{cases} \hat{W}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(W_{n+1-j} - \hat{W}_{n+1-j}), & 1 \leq n < m, \\ \hat{W}_{n+1} = \sum_{j=1}^q \theta_{nj}(W_{n+1-j} - \hat{W}_{n+1-j}), & n \geq m, \end{cases} \quad (4.23)$$

gdje su koeficijenti  $\theta_{nj}$  i srednje kvadratne greške  $r_n = E(W_{n+1} - \hat{W}_{n+1})^2$  dobivene rekuzijom iz 4.15 s definiranim kao u 4.22. Bitna značajka prediktora 4.23 je iščezavanje  $\theta_{nj}$  kada su  $n \geq m$  i  $j > q$ .

Da bi pronašli  $\hat{X}_n$  od  $\hat{W}_n$  promatramo, projicirajući svaku stranu od 4.19 na  $\mathcal{H}_{t-1}$ , tada

$$\begin{cases} \hat{W}_t = \sigma^{-1} \hat{X}_t, & t = 1, \dots, m, \\ \hat{W}_t = \sigma^{-1}[\hat{X}_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p}], & t > m, \end{cases} \quad (4.24)$$

što zajedno sa 4.19 pokazuje da je

$$X_t - \hat{X}_t = \sigma[W_t - \hat{W}_t], \text{ za svaki } t \geq 1. \quad (4.25)$$

Zamjenom  $(W_j - \hat{W}_j)$  sa  $\sigma^{-1}(X_j - \hat{X}_j)$  u 4.23 i supstitucijom u 4.24, konačno dobivamo

$$\begin{cases} \hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}), & 1 \leq n < m, \\ \hat{X}_{n+1} = \phi_1 X_n + \dots + \phi_p X_{n+1-p} + \sum_{j=1}^q \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}), & n \geq m, \end{cases} \quad (4.26)$$

i

$$E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 = \sigma^2 E(W_{n+1} - \hat{W}_{n+1})^2 = \sigma^2 r_n \quad (4.27)$$

gdje su  $\theta_{nj}$  i  $r_n$  dobiveni iz 4.29 s  $\kappa$  definiranim kao u 4.22. Jednadžbe 4.26 određuju one-step prediktore  $\hat{X}_2, \hat{X}_3, \dots$ , respektivno.

Kovarijance  $\kappa(i, j)$  transformiranog procesa  $\{W_t\}$  ovise samo o  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  i ne ovise o  $\sigma^2$ . Isto vrijedi i za  $\theta_{nj}$  i  $r_n$ .

Reprezentacija 4.26 za  $\hat{X}_{n+1}$  je osobito pogodna s praktične točke gledišta, ne samo zbog jedinstvenosti rekurzije za koeficijente, već i zato što za  $n \geq m$  zahtjeva najviše  $p$  zadnjih opažanja  $X_n, \dots, X_{n-1-p}$  i najviše  $q$  zadnjih inovacija  $(X_{n-1-j} - \hat{X}_{n-1-j}), j = 1, \dots, q$ , da bi predvidjeli  $X_{n+1}$ . S druge strane, direktna primjena Propozicije 4.2.3. na  $\{X_t\}$  vodi reprezentaciji od  $\hat{X}_{n+1}$  u terminima svih  $n$  prethodnih inovacija  $(X_j - \hat{X}_j), j = 1, \dots, n$ .

Može se pokazati da ako je  $\{X_t\}$  invertibilan da tada kad  $n \rightarrow \infty$ , tada  $r_n \rightarrow 1$  i  $\theta_{nj} \rightarrow \theta_j, j = 1, \dots, q$ .

### **$h$ -step prediktori ARMA( $p, q$ ) procesa, $h \geq 1$**

Kao u 5.2, koristit ćemo oznaku  $P_n$  za projekciju  $P_{\mathcal{H}_n}$ . Tada iz 4.16 imamo

$$\begin{aligned} P_n W_{n+h} &= \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(W_{n+h-j} - \hat{W}_{n+h-j}) \\ &= \sigma^{-1} \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}). \end{aligned}$$

Koristeći taj rezultat i primjenjujući operator  $P_n$  na obje strane jednadžbe 4.19, zaključujemo da  $h$ -step prediktor  $P_n X_{n+h}$  zadovoljava

$$P_n X_{n+h} = \begin{cases} \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j} (X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}), & 1 \leq m-n, \\ \sum_{i=1}^p \phi_i P_n X_{n+h-i} + \sum_{h \leq j \leq q} \theta_{n+h-1,j} (X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}), & h > m-n, \end{cases} \quad (4.28)$$

Jednom kad prediktore  $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$  izračunamo iz 4.26, uz fiksni  $n$ , jednostavno je rekurzivno odrediti prediktore  $P_n X_{n+1}, P_n X_{n+2}, P_n X_{n+3}, \dots$  iz 4.28.

Pod pretpostavkom da je  $n > m$ , što je uvijek slučaj s problemima predikcije u praksi, za  $h \geq 1$  imamo

$$P_n X_{n+h} = \sum_{i=1}^p \phi_i P_n X_{n+h-i} + \sum_{j=h}^q \theta_{n+h-1,j} (X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}), \quad (4.29)$$

gdje je drugi izraz nula ako je  $h > q$ . Izražavajući  $X_{n+h}$  kao  $\hat{X}_{n+h} + (X_{n+h} - \hat{X}_{n+h})$ , možemo pisati

$$X_{n+h} = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{n+h-i} + \sum_{j=h}^q \theta_{n+h-1,j} (X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}), \quad (4.30)$$

gdje je  $\theta_{n0} := 1$  za svaki  $n$ . Oduzimanjem 4.29 od 4.30 dobivamo

$$X_{n+h} - P_n X_{n+h} - \sum_{i=1}^p \phi_i (X_{n+h-i} - P_n X_{n+h-i}) = \sum_{j=0}^{h-1} \theta_{n+h-1,j} (X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}), \quad (4.31)$$

tj.

$$\Phi \begin{bmatrix} X_{n+1} - P_n X_{n+1} \\ \vdots \\ X_{n+h} - P_n X_{n+h} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} \\ \vdots \\ X_{n+h} - \hat{X}_{n+h} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

gdje su  $\Phi$  i  $\Theta$  donje trokutaste matrice,

$$\Phi = -[\phi_{i-j}]_{i,j=1}^h \quad (\phi_0 := -1, \phi_j := 0 \text{ ako je } j > p \text{ ili } j < 0),$$

i

$$\Theta = -[\theta_{n+i-1,i-j}]_{i,j=1}^h \quad (\theta_{n0} := 1, \theta_{nj} := 0 \text{ ako je } j > q \text{ ili } j < 0).$$

Iz 4.32 odmah možemo vidjeti da kovarijacijska matrica vektora prediktora  $(X_{n+1} - P_n X_{n+1}, \dots, X_{n+h} - P_n X_{n+h})'$  je

$$C = \Phi^{-1} \Theta V \Theta' \Phi'^{-1}, \quad (4.33)$$

gdje je  $V = \text{diag}(v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+h-1})$ . Lako se pokaže da je  $\Phi^{-1}$  donjetrokatista matrica

$$\Phi^{-1} = [\chi_{i-j}]_{i,j=1}^n \quad (\chi_0 := 1, \chi_j := 0 \text{ ako je } j < 0) \quad (4.34)$$

čije komponente  $\chi_j, j \geq 1$ , možemo lako izračunati iz rekurzivne relacije

$$\chi_j = \sum_{k=1}^{\min(p,j)} \phi_k \chi_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

Srednje kvadratna greška  $h$ -step prediktora  $P_n X_{n+h}$  je dobivena iz 4.33

$$\sigma_n^2(h) := E(X_{n+h} - P_n X_{n+h})^2 = \sum_{j=0}^{h-1} \left( \sum_{r=0}^j \chi_r \theta_{n+h-r-1, j-r} \right)^2 v_{n+h-j-1}. \quad (4.36)$$

Pretpostavljajući invertibilnost ARMA procesa, možemo pustiti  $n \rightarrow \infty$  u 4.29 i 4.36 da bi dobili aproksimaciju za veliki uzorak,

$$P_n X_{n+h} \simeq \sum_{i=1}^p \phi_i P_n X_{n+h-i} + \sum_{j=h}^q \theta_j (X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j}) \quad (4.37)$$

i

$$\sigma_n^2(h) \simeq \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \left( \sum_{r=0}^j \chi_r \theta_{j-r} \right)^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2, \quad (4.38)$$

gdje je

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j z^j \right) \left( \sum_{j=0}^q \theta_j z^j \right), \quad |z| \leq 1.$$

## 4.4 Predikcija stacionarnih Gaussovskih procesa; predikcijske granice

Neka je  $\{X_t\}$  stacionaran Gaussovski proces s očekivanjem nula i kovarijacijskom funkcijom  $\gamma(\cdot)$  takvom da je  $\gamma(0) > 0$  i  $\gamma(h) \rightarrow 0$  kada  $h \rightarrow \infty$ . Prema jednadžbi 4.7 najbolji linearni prediktor od  $X_{n+h}$  u terminima  $X_n = (X_1, \dots, X_n)'$  je

$$P_n X_{n+h} = [\gamma n + h - 1, \gamma n + h - 2, \dots, \gamma(h)] \Gamma_n^{-1} X_n, \quad h \geq 1 \quad (4.39)$$



Kalkulacija za  $P_n X_{n+h}$  jednostavno je izvedena rekurzivno uz pomoć 4.16, ili u slučaju ARMA( $p, q$ ) procesa, korištenjem 4.28. Budući da  $(X_1, \dots, X_{n+h})'$  ima višedimenzionalnu normalnu distribuciju, slijedi da

$$P_n X_{n+h} = E_{\mathbf{M}(X_1, \dots, X_n)} X_{n+h} = E(X_{n+h} | X_1, \dots, X_n).$$

Za stacionaran Gaussovski proces jasno je da je predikcijska greška  $\Delta_n(h) := X_{n+h} - P_n X_{n+h}$  normalno distribuirana s očekivanjem nula i varijancom

$$\sigma^2(h) = E\Delta_n(h)^2,$$

koja može biti izračunata bilo iz 4.17 u generalnom slučaju, ili iz 4.36 ako je  $\{X_t\}$  ARMA( $p, q$ ) proces.

Označimo li sa  $\Phi_{1-\alpha/2}$  ( $1 - \alpha/2$ )-kvantil standardne normalne distribucije, možemo iz razmatranja u prethodnom odlomku zaključiti da  $X_{n+h}$  leži između granica  $P_n X_{n+h} \pm \Phi_{1-\alpha/2} \sigma_n(h)$  s vjerojatnošću  $(1 - \alpha)$ . Ove granice nazivamo  $(1 - \alpha)$ -predikcijske granice za  $X_{n+h}$ .

## 4.5 Predikcija kauzalnog invertibilnog ARMA( $p, q$ ) procesa u terminima od $X_j, -\infty < j < n$

Ponekad je korisno, primarno u procjeni  $P_n X_{n+h}$  za velike  $n$ , odrediti projekciju od  $X_{n+h}$  na  $\mathcal{M}_n = \overline{\text{sp}}\{X_j, -\infty < j \leq n\}$ . Ovdje ćemo razmotriti problem u slučaju kada je  $\{X_t\}$  kauzalan invertibilan ARMA( $p, q$ ) proces,

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2) \quad (4.40)$$

Kako bi pojednostavili zapis, pretpostavljamo da je  $n$  fiksni pozitivan cijeli broj i definiramo

$$\tilde{X}_t := P_{\mathcal{M}_n} X_t \quad (= X_t \text{ za } t \leq n). \quad (4.41)$$

Tada možemo odrediti  $\tilde{X}_{n+h}$  i  $E(X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2$  iz sljedećeg teorema.  $E(X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2$  je korisno za velike  $n$  kao aproksimacija za  $E(X_{n+h} - P_n X_{n+h})^2$ .

**Teorem 4.5.1.** *Ako je  $X_t$  kauzalan invertibilan ARMA proces 4.40 i  $\tilde{X}_t$  je definiran sa 4.41, tada*

$$\tilde{X}_{n+h} = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j} \quad (4.42)$$

$$\tilde{X}_{n+h} = \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j Z_{n+h-j}, \quad (4.43)$$

gdje je  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \phi(z)/\theta(z)$  i  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z)$ ,  $|z| \leq 1$ . Štoviše,

$$E(X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2. \quad (4.44)$$

*Dokaz.* Iz teorema 3.1.6. i 3.1.8. znamo da je

$$Z_{n+h} = X_{n+h} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+h-j} \quad (4.45)$$

i

$$X_{n+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{n+h-j}. \quad (4.46)$$

Primjenom operatora  $P_{\mathcal{M}_n}$  na obje strane jednadžbe i korištenjem činjenice da je  $Z_{n+h}$  ortogonalan na  $\mathcal{M}_n$  za svaki  $k \geq 1$ , dobivamo jednadžbu 4.42 i 4.43. Tada oduzimanjem 4.43 od 4.46 dobivamo

$$X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j Z_{n+h-j}, \quad (4.47)$$

iz čega direktno slijedi 4.44.  $\square$

Jednadžba 4.42 je najprikladnije za računanje  $\tilde{X}_{n+h}$ . Može se riješiti rekursivno za  $h = 1, 2, 3, \dots$ , korištenjem uvjeta  $\tilde{X}_t = X_t$ ,  $t \leq n$ . Stoga,

$$\tilde{X}_{n+1} = - \sum_{j=1}^{\text{infy}} \pi_j X_{n+1-j},$$

$$\tilde{X}_{n+2} = -\pi_1 \tilde{X}_{n+1} - \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j X_{n+2-j},$$

itd.

Za velike  $n$ , krnje rješenje  $\tilde{X}_n^T$ , dobiveno iz  $\sum_{j=n+h}^{\infty} \pi_j X_{n+h-j} = 0$  u 4.42 i rješavanjem dobivene jednadžbe,

$$\tilde{X}_{n+h}^T = - \sum_{j=1}^{n+h-1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j}^T \text{ uz } \tilde{X}_t = X_t, t = 1, \dots, n,$$

je ponekad korišteno kao aproksimacija za  $P_n X_{n+h}$ . Ovaj postupak daje

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{n+1}^T &= -\sum_{j=1}^n \pi_j X_{n+1-j}, \\ \tilde{X}_{n+2}^T &= -\pi_1 \tilde{X}_{n+1}^T - \sum_{j=2}^{n+1} \pi_j X_{n+2-j}, \\ &\text{itd.}\end{aligned}$$

Srednje kvadratna greška od  $\tilde{X}_{n+h}$  definirana u 4.44 također se ponekad koristi u aproksimaciji za  $E(X_n - P_n X_{n+h})^2$ . Aproksimacija 4.44 je zapravo velika uzoračka aproksimacija 4.38 za srednje kvadratnu grešku 4.36 od  $P_n X_{n+h}$ .

Za AR( $p$ ) proces, jednačba 4.42 dovodi do očekivanog rezultata

$$\tilde{X}_{n+1} = \phi_1 X_n + \cdots + \phi_p X_{n+1-p},$$

uz srednje kvadratnu grešku

$$E(X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2 = \sigma^2.$$

Za MA(1) proces 4.42 daje

$$\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{j=0}^{\infty} (-\theta_1)^{j+1} X_{n-j},$$

uz srednje kvadratnu grešku

$$E(X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2 = \sigma^2.$$

”Skraćena” aproksimacija za  $P_n X_{n+1}$  za MA(1) proces je

$$\tilde{X}_{n+1}^T = -\sum_{j=0}^{n+1} (-\theta_1)^{j+1} X_{n-j},$$

što može biti loša aproksimacija ako je  $|\theta_1|$  blizu 1.

Za fiksni  $n$ , predikcijske greške  $X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h}$ ,  $h = 1, 2, \dots$ , nisu nekorelirane. Jasno je da je iz 4.47 kovarijanca  $h$ -step i  $k$ -step prediktorskih grešaka

$$E[(X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})(X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \psi_{j+k-h} \text{ za } k \geq h. \quad (4.48)$$

Odgovarajuća kovarijanca od  $(X_{n+h} - P_n X_{n+h})$  i  $(X_{n+h} - P_n X_{n+h})$  kompliciranija, ali je možemo izvesti iz 4.33.

## Poglavlje 5

# Primjena ARMA modela u medicini

U ovom poglavlju se bavimo analizom podataka jedne bolnice, a ta je analiza napravljena u statističkom programu **R**. Kod u **R**-u nije optimiziran budući da je napravljen u svrhu prikaza rezultata potrebnih za ovaj diplomski rad.

### 5.1 Opisna statistika

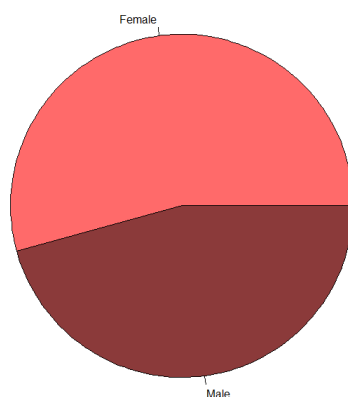
Najprije ćemo se upoznati sa podacima: njihovim izgledom, strukturom i značenjem. Sljedeća tablica daje nam primjer podataka koje koristimo za analizu.

Tablica 5.1: Primjer tablice s podacima

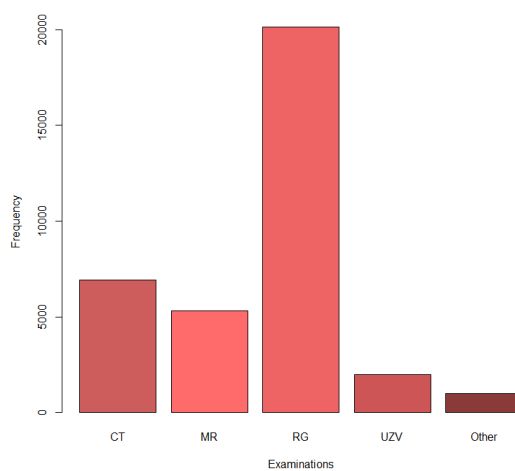
Pregled	Spol	Dob	Datum pregleda
UZV	F	35	01.01.2014.
MR	M	56	02.01.2014.
RG	M	23	01.01.2014.
CT	F	15	01.02.2014.
Other	M	66	02.02.2014.
:	:	:	:

Pregledi koje bolnica radi su: CT (računalna tomografija), MR (magnetna rezonanca), RG (rendgen), UZV (ultrazvuk) i Other (ostalo). Spol pacijenata označen je sa F (žensko) i M (muško). Dob pacijenata je u skupu  $\{1, \dots, 103\}$ , a datumi koje imamo kreću se u rasponu od 01. siječnja 2014. do 09. veljače 2014. (40 dana). Tablica s podacima ukupno sadrži 35 500 redaka, odnosno 35 500 obavljenih pretraga nad pacijentima.

Kroz idućih nekoliko dijagrama možemo bolje vidjeti s kakvim podacima radimo.



Slika 5.1: Frekvencije spolova pacijenata

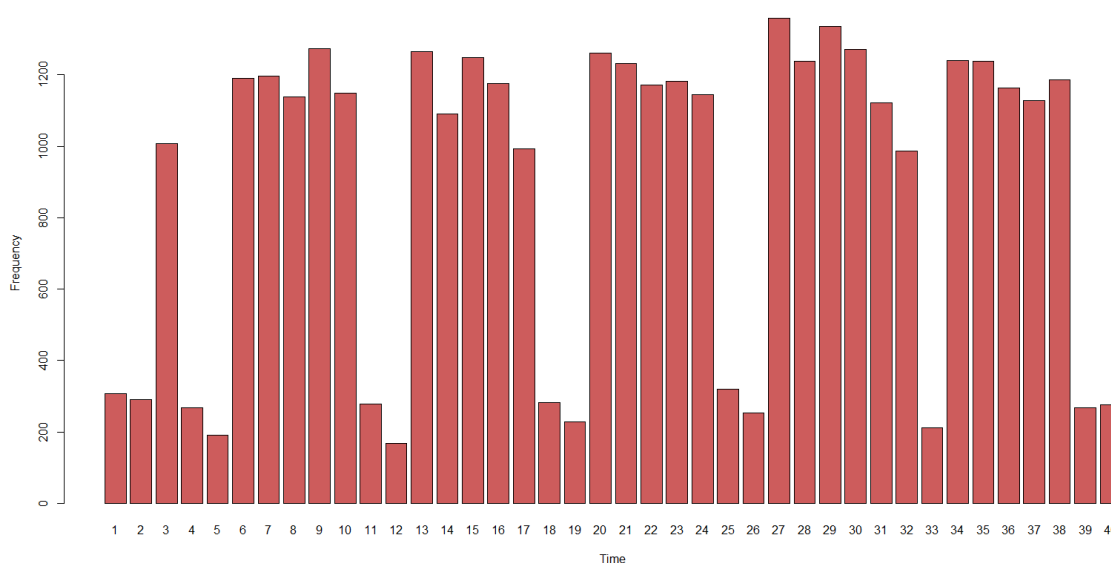


Slika 5.2: Frekvencije pregleda

Na slici 5.1 možemo vidjeti da je udio pacijentica veći u odnosu na pacijente, dok iz slike 5.2 vidimo frekvencije pregleda, pri čemu je u bolnici u 40 dana najviše napravljeno rendgena, a najmanje ultrazvuka od četiri vrste istaknutih pretraga.

Na slikama 5.3 - 5.6 vidimo frekvencije pregleda; slika 5.3 sadrži frekvencije svih pre-

gleda u vremenskom periodu od 40 dana, a ostale slike frekvencije po pojedinim vrstama pregleda. Na dijagramima možemo uočiti periodičnost, tj. tjedne i vikende, pa je zanimljivo kako se neki pregledi obavljaju vikendima (CT slika 5.4 lijevo, RG slika 5.5 i UZV slika 5.6 lijevo), dok druge ne (MR slika 5.4 desno i ostali slika 5.6 desno). Kako je 1. siječanj 2014. srijeda (u tjednu), vidimo da su se pregledi obavljali po uzoru na vikende što je sasvim u redu budući da se radi o neradnom danu.

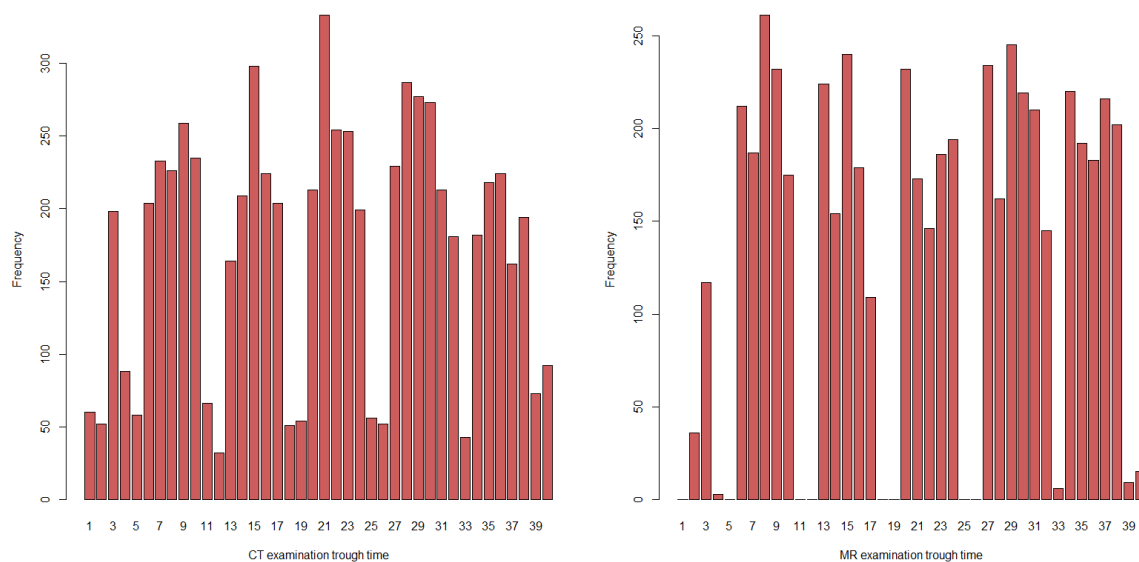


Slika 5.3: Frekvencije svih pregleda kroz promatrani vremenski period

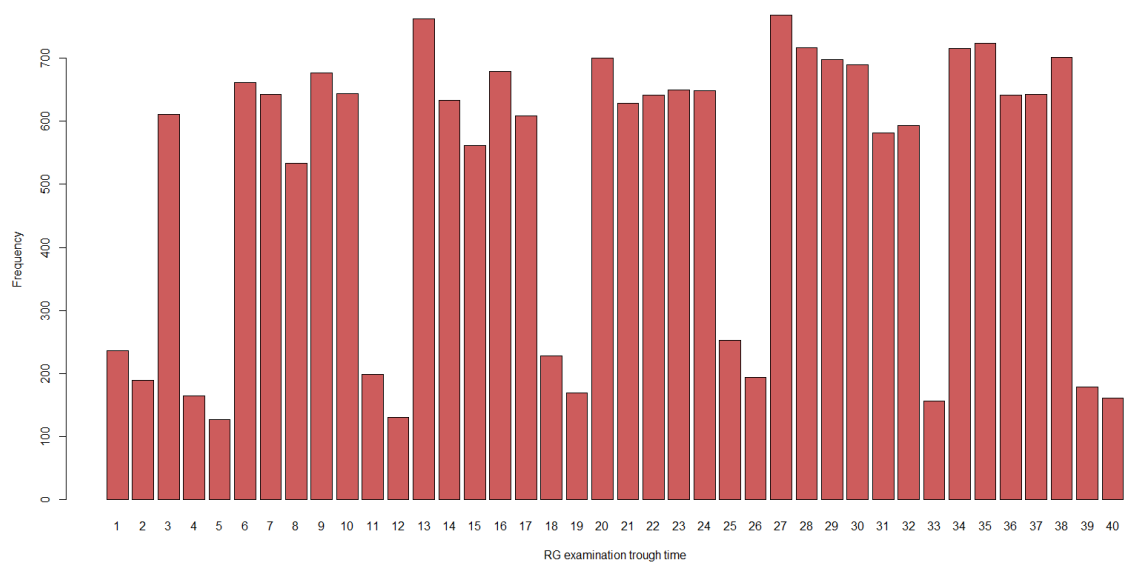
Dijagram 5.7 daje frekvencije pregleda po dobi pacijenata: mlađe generacije obavljaju manje pregleda u odnosu na starije generacije. U promatranom vremenskom periodu najviše pregleda obavili su pacijenti u dobi od 67 godina, a zanimljiv je dupli broj pregledanih jednogodišnjaka u usporedbi s djecom do dobi od 10 godina.

Na slikama 5.8 i 5.9 možemo vidjeti frekvencije kao vremenski niz, tj. reći ćemo da promatramo kretanje broja pregleda kroz vrijeme na 5.8 i kretanje broja prosječne dobi i spola na 5.9. Na slici 5.8 kretanje vidimo za sve preglede skupa i pojedinačno. Kao i na dijagramima, lako možemo identificirati tjedne i vikende što bi značilo da postoji senzonalnost s periodom  $d = 7$ .

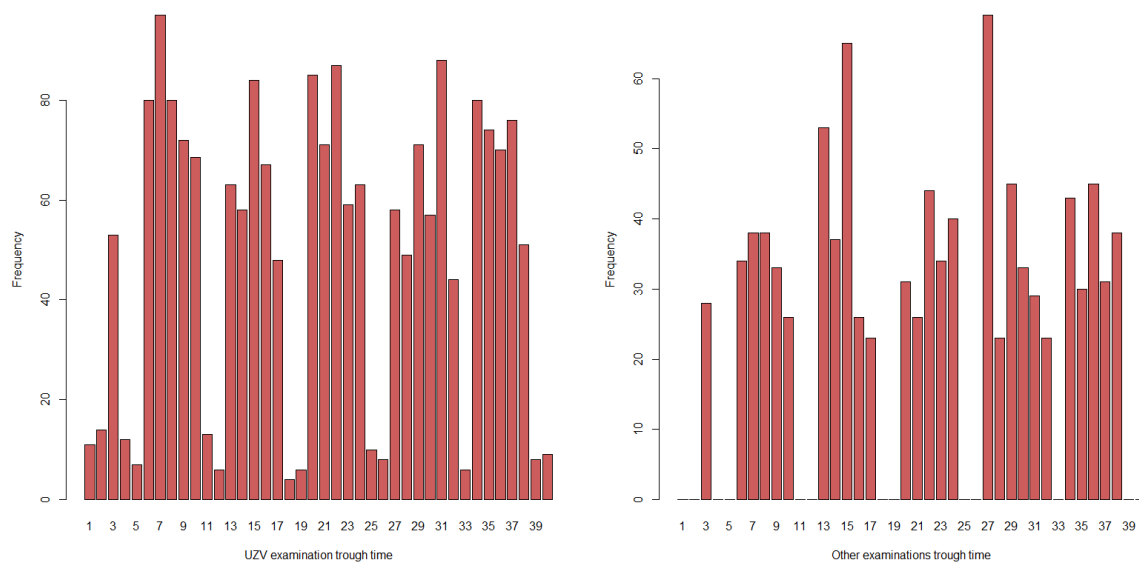
Slična situacija je i na slici 5.9 kada promatramo kretanje muških i ženskih pacijenata (u sumi) koji su obavljali preglede u vremenskom intervalu od 40 dana (zadnja dva prikaza: Female i Male). Iz prva dva prikaza na istoj slici gdje vidimo kretanje prosječne dobi po spolu senzonalnot nije očita.



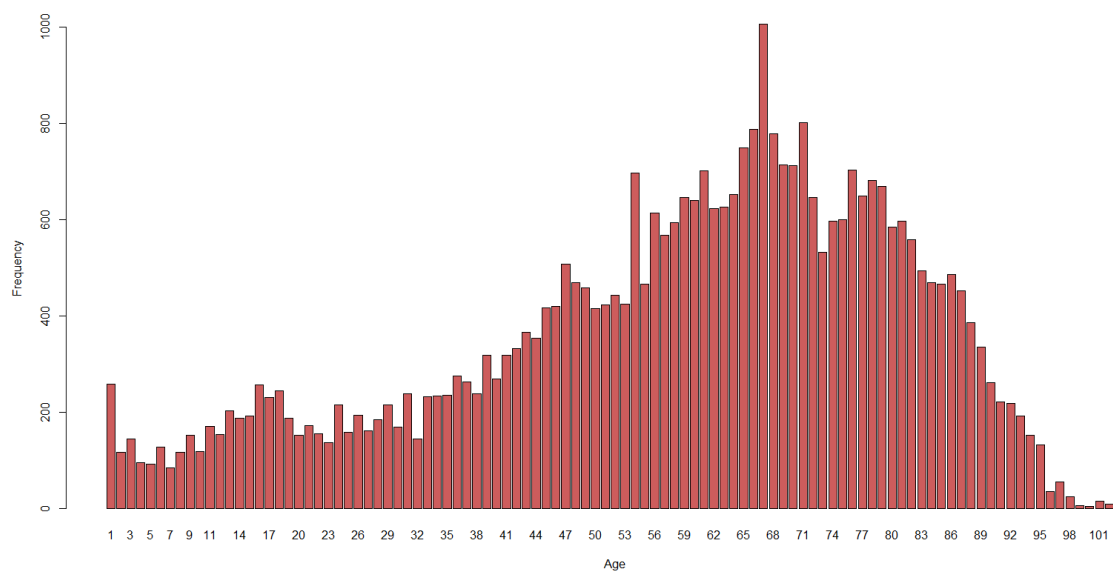
Slika 5.4: Frekvencije CT-a i MR-a kroz promatrani vremenski period



Slika 5.5: Frekvencije RG-a kroz promatrani vremenski period

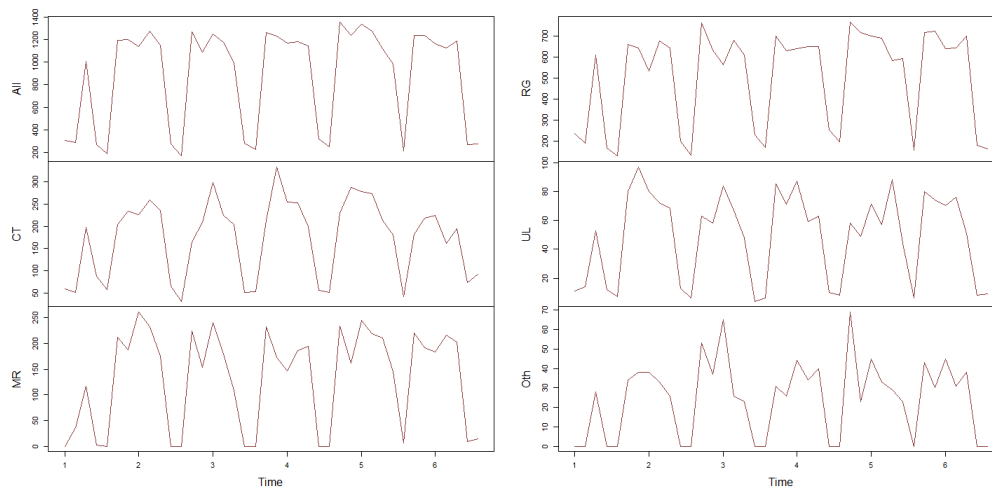


Slika 5.6: Frekvencije UZV-a i ostalih pregleda kroz promatrani vremenski period

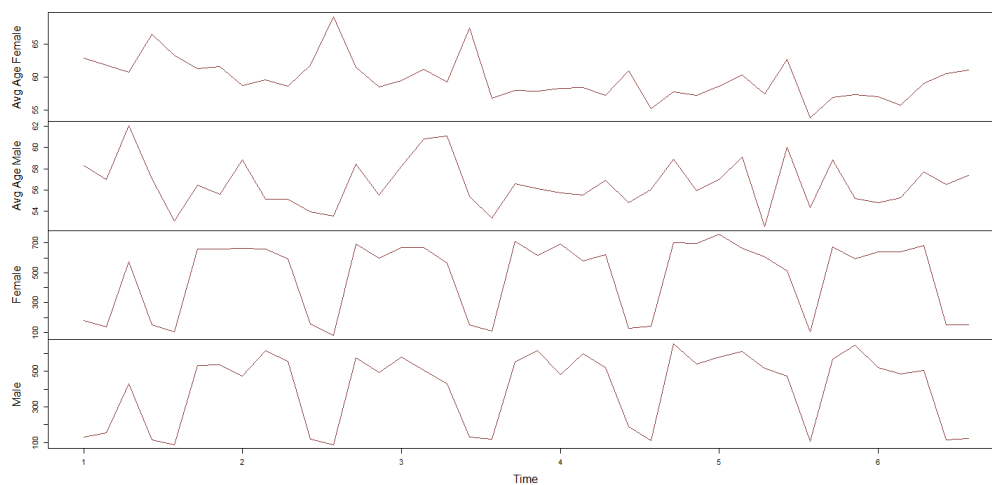


Slika 5.7: Frekvencije svih pregleda po dobi pacijenata





Slika 5.8: Kretanje broja pregleda kroz vrijeme (svi zajedno, CT, MR, RG, CT, Ostali)

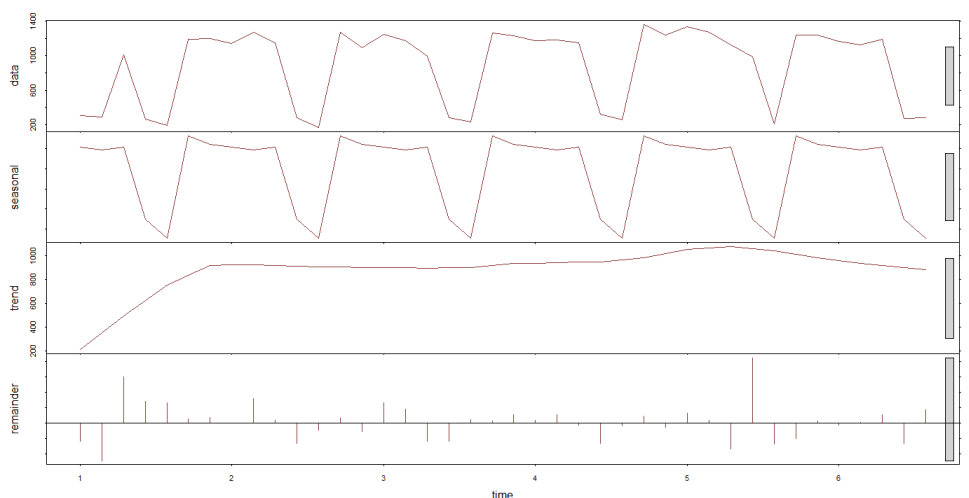


Slika 5.9: Kretanje prosječne dobi i spola pacijenata kroz vrijeme

## 5.2 Obrada podataka

Detaljnije ćemo analizirati samo kretanje broja svih pregleda i rendgena.

Slika 5.10 predstavlja (klasičnu) dekompoziciju 1.5 vremenskog niza pregleda na: komponentu sezonalnosti, komponentu trenda i rezidualne (zadnja tri reda slike). Iz te dekom-



Slika 5.10: Dekompozicija vremenskog niza svih pregleda

pozicije vidimo da senzonalnost svakako postoji (što smo i vidjeli na ranijim dijagramima) s periodom  $d = 7$ . Također, možemo zaključiti da se trend ne mijenja, odnosno da je konstantan. Dekompoziciju u **R**-u daje nam funkcija

```
stl(ts, "periodic").
```

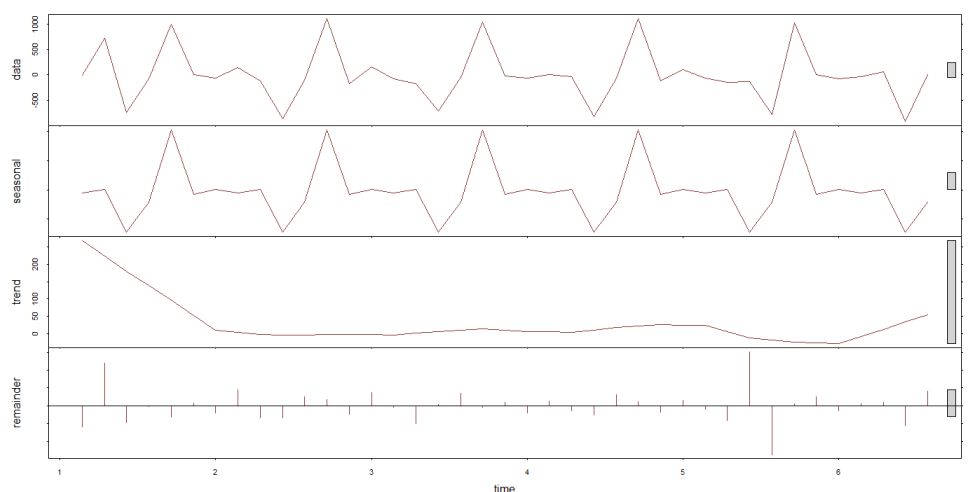
Kako senzonalnost postoji, iskoristit ćemo jednu od metoda uklanjanja trenda opisanih u prvom dijelu rada - diferenciranje. U **R**-u postoji naredba koja nam upravo to radi:

```
diff(ts, n)
```

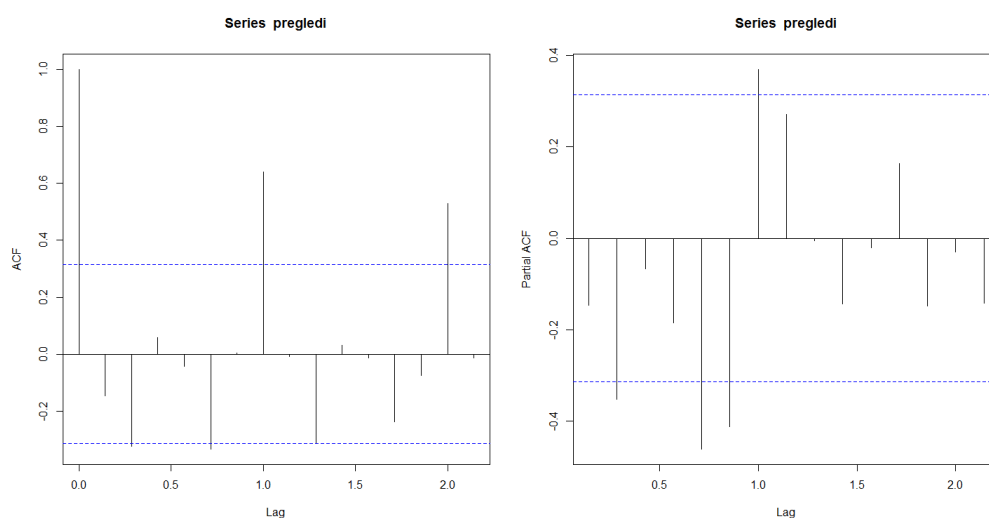
gdje su ulazni podaci funkcije vremenski niz  $ts$  i broj diferenciranja  $n$ . Ovdje ćemo diferencirati jednom, odnosno za  $n = 1$ . Dobiveni niz je stacionaran što nam sugeriraju tri korištena testa za provjeru stacionarnosti:

```
adf.test(ts, alternative = "stationary")
kpss.test(ts)
Box.test(ts, type = "Ljung-Box")
```

Ponovo radimo dekompoziciju, ali ovaj put diferenciranog vremenskog niza, što možemo vidjeti na slici 5.11. Možemo uočiti da senzonalnost još uvijek postoji, ali danjim transformacijama ne postizemo potpuno uklanjanje senzonalnosti, a zbog male količine podataka ostajemo na ovome (svakim diferenciranjem vremenski period se smanjuje, pa tako više nemamo vremenski niz od 40 dana već 39 dana).



Slika 5.11: Dekompozicija diferenciranog vremenskog niza svih pregleda



Slika 5.12: ACF i PACF diferenciranog vremenskog niza svih pregleda

Iz parcijalne autokorelacijske funkcije (Partial ACF, slika 5.12 desno) možemo vidjeti koje su korelacije značajne za autoregresivni dio ARMA procesa, odnosno koliko varijabli je proizašlo iz prošlosti. Vidimo značajnost korelacija u pomaku (lagu) 2, 5, 6 i one su negativne (-0.324, -0.333, 0.640), dok su u pomaku 7 pozitivne (0.528).

Iz autokorelacijske funkcije (ACF, slika 5.12 lijevo) značajne korelacije za MA dio su

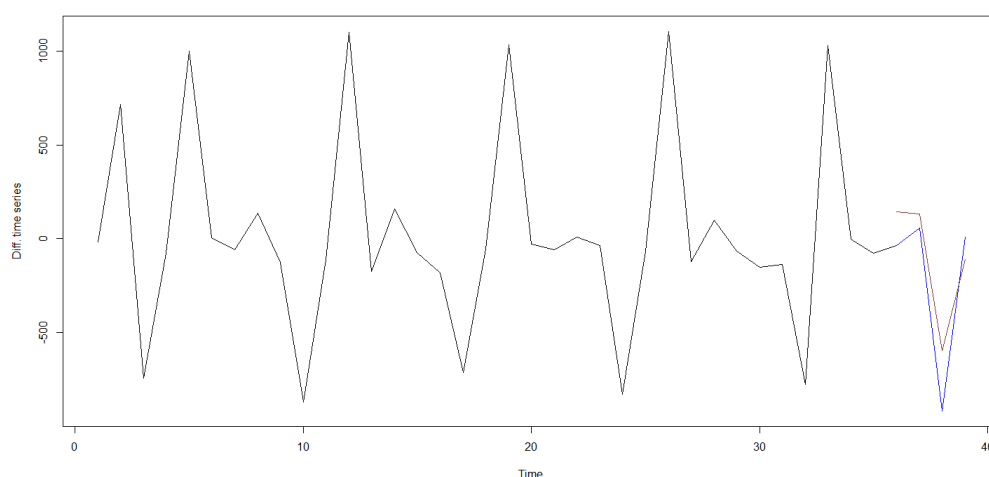
u pomaku 2 i 5 gdje su negativne (-0.324, -0.333), i u pomaku 7 gdje su pozitivne (0.640). Dobivamo da je  $p \in \{2, 5, 6, 7\}$  i  $q \in \{2, 5, 7\}$ .

Nakon odabira modela (tj.  $p = 5$  i  $q = 2$ ), radimo predikciju uz pomoć naredbe

```
predict(ts,n.ahead)
```

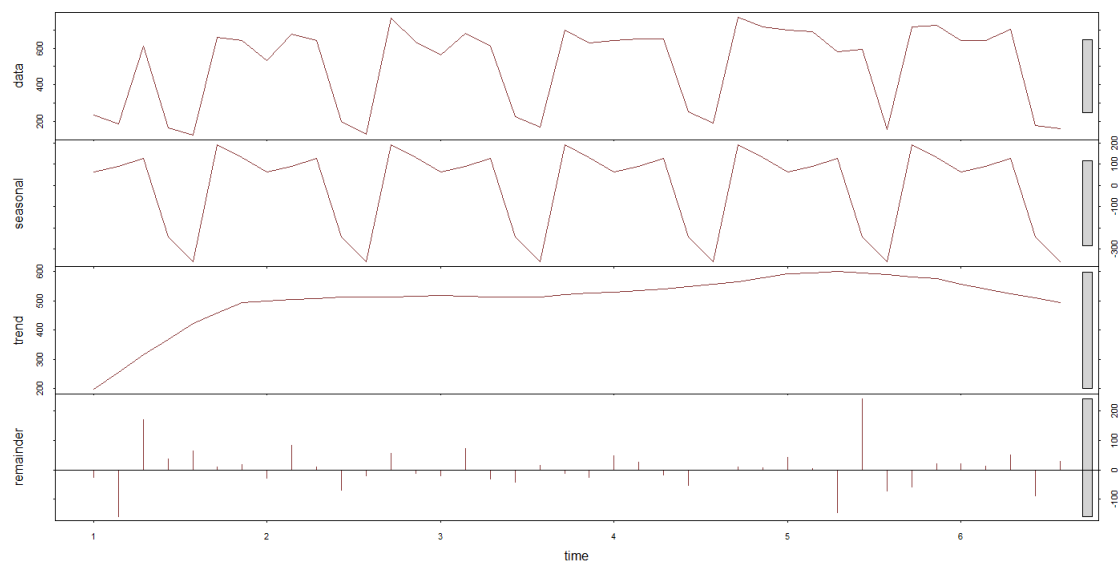
gdje uzimamo  $n.ahead = 4$ . Grafički prikaz toga možemo vidjeti na slici 5.13 gdje imamo prikaz početnog diferenciranog niza u vremenskim trenucima od 1 do 35 (ARMA(5,2) model primjenili smo na početnih 35 vremenskih točaka) i zajedno sa ostatkom diferenciranog niza (plavo) i predikcijom (ružičasto). Možemo vidjeti da odabrani ARMA proces radi poprilično dobru predikciju.

Potpuno iste korake analize radimo za kretanje rendgena i dolazimo do sličnih rezultata, a predikcija zajedno sa ostatkom je vidljiva na slici 5.17

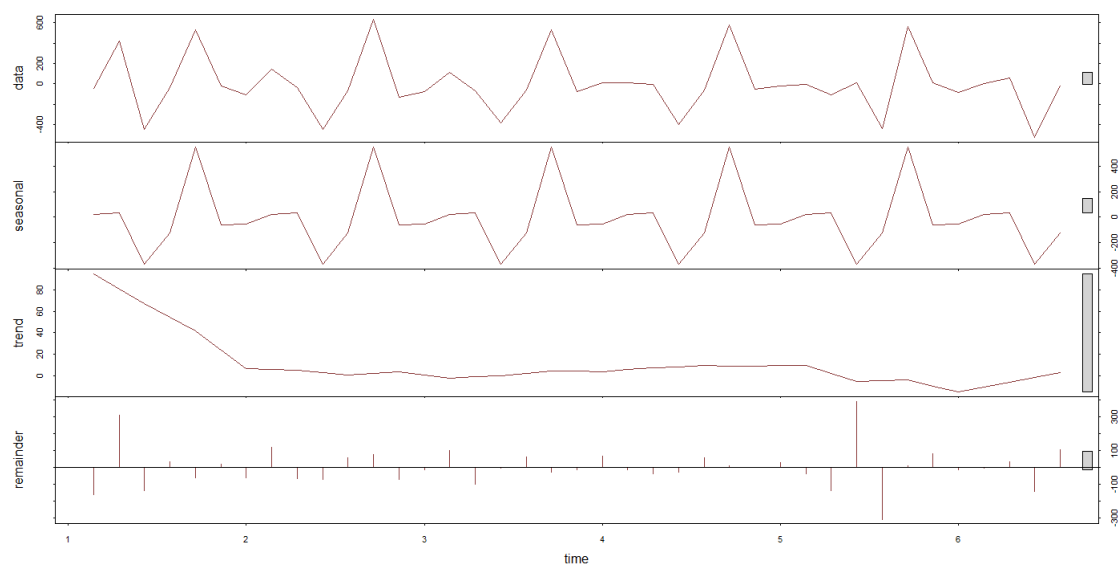


Slika 5.13: Diferencirani vremenski niz i predikcija

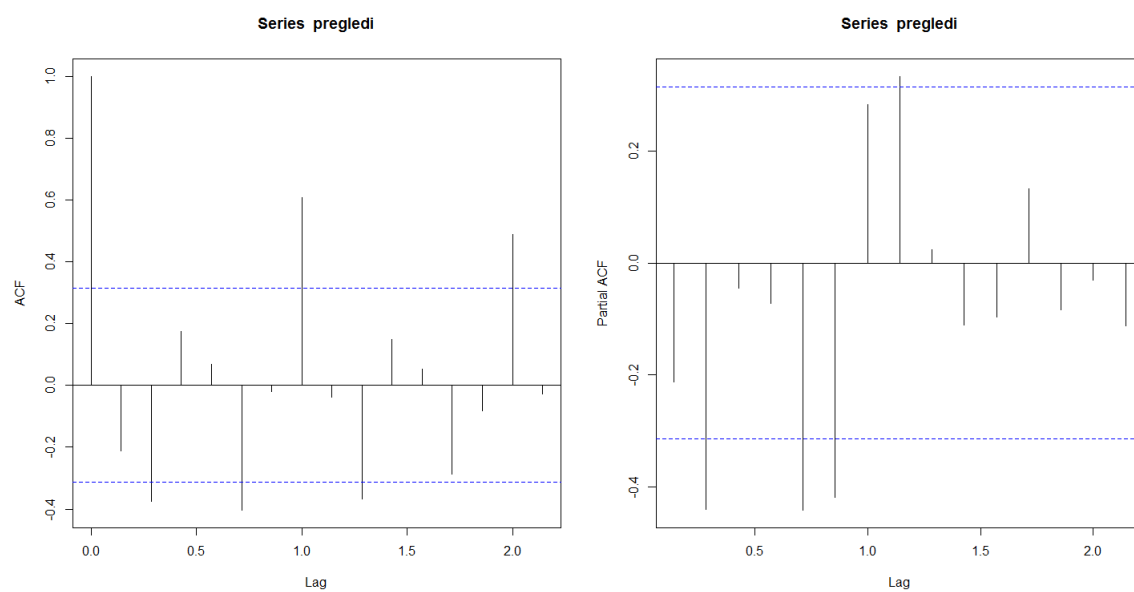
Iako podataka ima poprilično malo, na temelju njih možemo zaključiti da ARMA proces daje poprilično dobre rezultate predikcije.



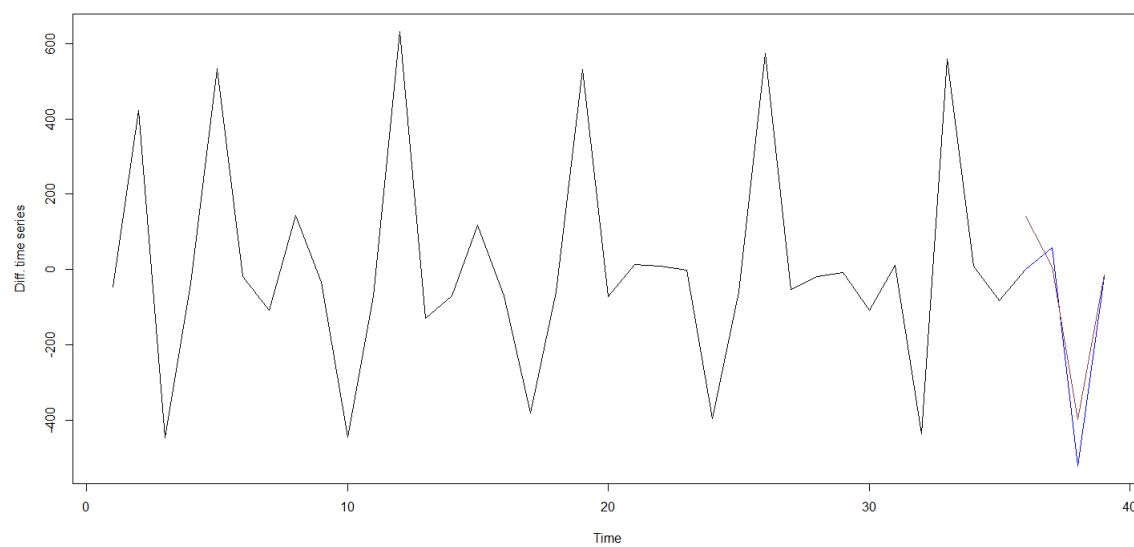
Slika 5.14: Dekompozicija vremenskog niza RG-a



Slika 5.15: Dekompozicija vremenskog niza RG-a



Slika 5.16: ACF i PACF diferenciranog vremenskog niza RG-a



Slika 5.17: Diferencirani vremenski niz i predikcija

## Dodatak A

### Kodovi u R-u

Ovdje dajemo kod napravljen u statističkom programu **R**. Ponovo napominjemo da kod nije optimiziran s obzirom da je napravljen u svrhu analize i dobivanja rezultata potrebnih samo za ovaj diplomski rad.

```
library(forecast), library(tseries)

#učitavanje podataka

data = read.table("podaci.txt", header = TRUE)
spol = data[,1]
dob = data[,2]
pregled = data[,3]
data[,4] = as.Date(data[,4], format("%d-%m-%Y"))
datumi = data[,4]
dani = data[,5]

n = length(data[,1])

spolovi = numeric(n)
for(i in 1:n){
  if(spol[i] == "F") spolovi[i] = 1
}

#brojanje frekvencija

frekvencije = numeric(40)
```

```
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j]) k = k + 1
  frekvencije[i] = k
}

frekvencije_CT = numeric(40)
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j])
      if(pregled[j] == "CT") k = k + 1
  frekvencije_CT[i] = k
}

frekvencije_MR = numeric(40)
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j])
      if(pregled[j] == "MR") k = k + 1
  frekvencije_MR[i] = k
}

frekvencije_RG = numeric(40)
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j])
      if(pregled[j] == "RG") k = k + 1
  frekvencije_RG[i] = k
}

frekvencije_UZV = numeric(40)
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j])
```



```
        if(pregled[j] == "UL") k = k + 1
    frekvencije_UZV[i] = k
}

frekvencije_Other = numeric(40)
for (i in 1:40) {
    k = 0
    for(j in 1:length(dani))
        if(i == dani[j])
            if(pregled[j] == "Other") k = k + 1
    frekvencije_Other[i] = k
}

frekvencije_Male = numeric(40)
for (i in 1:40) {
    k = 0
    for(j in 1:length(dani))
        if(i == dani[j])
            if(spol[j] == "M") k = k + 1
    frekvencije_Male[i] = k
}

frekvencije_Female = numeric(40)
for (i in 1:40) {
    k = 0
    for(j in 1:length(dani))
        if(i == dani[j])
            if(spol[j] == "F") k = k + 1
    frekvencije_Female[i] = k
}

frekvencije_prosjekDob = numeric(40)
for (i in 1:40) {
    k = 0
    for(j in 1:length(dani))
        if(i == dani[j]) k = k + dob[j]
    frekvencije_prosjekDob[i] = k/frekvencije[i]
}
```

```
frekvencije_prosjekDobM = numeric(40)
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j])
      if(spol[j] == "M") k = k + dob[j]
  frekvencije_prosjekDobM[i] = k/frekvencije_Male[i]
}

frekvencije_prosjekDobF = numeric(40)
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j])
      if(spol[j] == "F") k = k + dob[j]
  frekvencije_prosjekDobF[i] = k/frekvencije_Female[i]
}

frekvencije_prosjekDob = numeric(40)
for (i in 1:40) {
  k = 0
  for(j in 1:length(dani))
    if(i == dani[j]) k = k + dob[j]
  frekvencije_prosjekDob[i] = k/frekvencije[i]
}

fr_spol = numeric(2)
fr_spol[1] = sum(frekvencije_Female)
fr_spol[2] = sum(frekvencije_Male)

fr_dob = numeric(max(dob))

for (i in 1:max(dob)) {
  k = 0
  for(j in 1:n)
    if(i == dob[j]) k = k + 1
  fr_dob[i] = k
}
```

```
fr_pregledi = numeric(5)
fr_pregledi[1] = sum(frekvencije_CT)
fr_pregledi[2] = sum(frekvencije_MR)
fr_pregledi[3] = sum(frekvencije_RG)
fr_pregledi[4] = sum(frekvencije_UZV)
fr_pregledi[5] = sum(frekvencije_Other)

#grafički prikaz frekvencija

pie(fr_spol, labels = c("Female", "Male"), col = c("indianred1",
"indianred4"))

pie(fr_pregledi, labels = c("CT", "MR", "RG", "UZV", "Other"))

barplot(fr_pregledi, names.arg = c("CT", "MR", "RG", "UZV",
Other"), xlab = c("Examinations"), ylab = c("Frequency"), col
= c("indianred", "indianred1", "indianred2", "indianred3",
"indianred4"))

barplot(frekvencije, names.arg = 1:40, axisnames = TRUE, xlab
= c("Time"), ylab = c("Frequency"), col = "indianred")

par(mfrow = c(1,2))

barplot(frekvencije_CT, names.arg = 1:40, axisnames = TRUE,
xlab = c("CT examination trough time"), ylab = c("Frequency"),
col = "indianred")

barplot(frekvencije_MR, names.arg = 1:40, axisnames = TRUE,
xlab = c("MR examination trough time"), ylab = c("Frequency"),
col = "indianred")

par(mfrow = c(1,1))

barplot(frekvencije_RG, names.arg = 1:40, axisnames = TRUE,
xlab = c("RG examination trough time"), ylab = c("Frequency"),
col = "indianred")
```

```

par(mfrow = c(1,2))

barplot(frekvencije_UZV, names.arg = 1:40, axisnames = TRUE,
xlab = c("UZV examination trough time"), ylab = c("Frequency"),
col = "indianred")

barplot(frekvencije_Other, names.arg = 1:40, axisnames = TRUE,
xlab = c("Other examinations trough time"), ylab = c("Frequency
"), col = "indianred")

par(mfrow = c(1,1))

barplot(fr_dob, names.arg = 1:103, axisnames = TRUE, xlab =
c("Age"), ylab = c("Frequency"), col = "indianred")

#kreiranje matrica svih frekvencija

Matrica1 = matrix(numeric(240),40,6)

Matrica1[ ,1] = frekvencije
Matrica1[ ,2] = frekvencije_CT
Matrica1[ ,3] = frekvencije_MR
Matrica1[ ,4] = frekvencije_RG
Matrica1[ ,5] = frekvencije_UZV
Matrica1[ ,6] = frekvencije_Other

Matrica2 = matrix(numeric(160),40,4)

Matrica2[ ,1] = frekvencije_prosjekDobF
Matrica2[ ,2] = frekvencije_prosjekDobM
Matrica2[ ,3] = frekvencije_Female
Matrica2[ ,4] = frekvencije_Male

#definiranje vremenskih nizova

TS.matrica = ts(Matrica1, start = 1, frequency = 7, names =
c("All", "CT", "MR", "RG", "UL", "Oth"))

```

```
plot.ts(TS_matrica, main = c(" "), col = "indianred4")

TS_matrica2 = ts(Matrica2, start = 1, frequency = 7, names =
c("Avg Age Female", "Avg Age Male", "Female", "Male"))

plot.ts(TS_matrica2, main = c(" "), col = "indianred4")

#donji dio ponavljamo dva puta za sljedeće dvije definicije varijabli

pregledi = TS_matrica[,1]

pregledi = TS_matrica[,4]

#dekompozicija vremenskog niza

x = stl(pregledi,"periodic")
plot(x, col = "indianred4")

#direrenciranje vremenskog niza

pregledi = diff(pregledi,1)

#testiranje stacionarnosti diferenciranog vremenskog niza

adf.test(pregledi, alternative = "stationary")
kpss.test(pregledi)
Box.test(pregledi, type = "Ljung-Box", lag = 7)

#dekompozicija diferenciranog vremenskog niza

x = stl(pregledi, "periodic")
plot(x, col = "indianred4")

dekomp = x$time.series

sezonalnost = dekomp[,1]
trend = dekomp[,2]
ostatak = dekomp[,3]
```

```
#odabir modela
#crtanje autokorelacijske i parcijalne autokorelacijske funkcije

par(mfrow = c(1,2))
acf(pregledi)
pacf(pregledi)
par(mfrow = c(1,1))

#ispis značajnih vrijednosti potrebnih za odabir redova ARMA modela (p,q)

acf(pregledi, lag.max = 20, plot = FALSE)
pacf(pregledi, lag.max = 20, plot = FALSE)

p = 5; q = 2

ARMA = arima(pregledi[1:35], order = c(p,0,q))

res = ARMA$residuals

#testiranje normalnosti ostataka

shapiro.test(res)

#predikcija

predict(ARMA, n.ahead = 4)
confint(ARMA)
predikcija = predict(ARMA, n.ahead = 4)
predikcija$pred

#grafički prikaz dobivenih rezultata

sve = numeric(39)
sve = ts(pregledi, frequency = 1)
plot.ts(sve, ylab = c("Diff. time series"))
points(36:39, pregledi[36:39], col = "blue", type = "l")
points(36:39, predikcija$pred, col = "indianred4", type = "l")
```

# Bibliografija

- [1] P. J. Brockwell, R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, Springer Science+Business Media, New York, 2006.
- [2] P. J. Brockwell, R. A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer Science+Business Media, New York, 2002.
- [3] A. Coghlan, *A Little Book of R For Time Series*, Wellcome Trust Sanger Institute, Cambridge, 2016.
- [4] V. Wagner, *Vremenski nizovi I*, dostupno na [https://web.math.pmf.unizg.hr/wagner/userfiles/nastava/sp2\\_vjezbe5.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/wagner/userfiles/nastava/sp2_vjezbe5.pdf) (srpanj 2016.)
- [5] V. Wagner, *Vremenski nizovi II*, dostupno na [https://web.math.pmf.unizg.hr/wagner/userfiles/nastava/sp2\\_vjezbe6.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/wagner/userfiles/nastava/sp2_vjezbe6.pdf) (srpanj 2016.)
- [6] V. Wagner, *Vremenski nizovi III*, dostupno na [https://web.math.pmf.unizg.hr/wagner/userfiles/nastava/sp2\\_vjezbe7.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/wagner/userfiles/nastava/sp2_vjezbe7.pdf) (srpanj 2016.)

# Sažetak

U ovom radu objasnili smo pojam vremenskog niza i dali teorijsku podlogu i alate za njegovu analizu i obradu. Obradili smo pojmove stacionarnog procesa i  $ARMA(p, q)$  procesa, te pojmove autokovarijacijske funkcije, autokorelacijske funkcije (acf) i parcijalne autokorelacijske funkcije (pacf) koje imaju ključnu ulogu i moćan su alat u njihovim obradama.

Razrađenu teoriju primjenili smo na konkretne i stvarne podatke dobivene iz tajnih izvora jedne norveške bolnice koristeći gotove funkcije statističkog programa **R**. Cilj analize bio je modelirati podatke  $ARMA$  procesom i napraviti predikcije na temelju istih.

Na početne podatke primjenili smo metodu diferenciranja kako bi uklonili sezonalnost. Autokorelacijska i parcijalna autokorelacijska funkcija dale su nam naslutiti red  $ARMA(p, q)$  procesa. Odabirom modela i njegovom primjenom na jedan dio diferenciranih podataka (uzeli smo broj pregleda u prvih 35 vremenskih točaka), napravili smo predikciju nad modeliranim podacima za sljedećih 4 dana. Grafički smo prikazali cijeli diferencirani niz te na njega dodali predikciju iz čega se može vidjeti da na ovim podacima  $ARMA$  proces daje poprilično dobre rezultate predikcije. Općenito, rezultate predikcija ne možemo uzeti s velikom sigurnošću, gotovo uvijek će to biti približne vrijednosti.



# Summary

In this thesis we described what a time series is, we gave theoretical background and established the tools and basis for its analysis. Also, we gave concept of the stationary process,  $ARMA(p, q)$  process, autocovariance function, autocorrelation function (acf) and partial autocorrelation function (pacf) which have a crucial role and are a mighty tool in their analysis.

We used elaborated theory on concrete and real data provided from anonymous source from Norwegian hospital using static program functions in **R**. The goal of the analysis was to model data using the ARMA process and to establish predictions according to it.

We used differencing method on the starting data to remove its seasonality. Autocorrelation and partial autocorrelation functions provided us with order of the  $ARMA(p, q)$  process. Choosing model and using it on one part of the differenced data (we took the number of examinations in the first 35 time points), we made predictions on the modeled data for the next 4 days. We made a graphic preview of the differenced series and added the prediction on top of it. We can deduct that the ARMA process outputs relatively accurate prediction results. The predicted results will always provide only an approximation of the values, so they should not be taken as precise values.

# Životopis

Rođena sam 6. studenog 1991. godine u Zaboku. U periodu od 1998. do 2006. pohađala sam Osnovnu školu Antuna Mihanovića u Klanjcu.

Nakon osnovnoškolskog obrazovanja, 2006. godine upisujem Srednju školu Zabok, ekonomski smjer. 2006. godine sudjelujem na državnom natjecanju iz knjigovodstva s bilanciranjem koje se održavalo u Rovinju. Srednju školu završavam 2010. godine.

Iste godine selim u Zagreb i upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilište u Zagrebu koji završavam 2014. godine.

Ostajem na istom fakultetu i 2014. upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.

Uključujem se u udrugu Mladih nadarenih matematičara Marin Getaldić krajem 2015. kao voditeljica tima za dizaj.

Pred sam kraj diplomskog studija 2016. godine počinjem raditi u ISP Privrednoj Banci Zagreb, u odjelu Upravljanje rizicima.